





CATECHISMO

DI

ARITMETICA

OPERE DELLO STESSO AUTORE



<i>Riassunto delle lezioni date alla scuola di ponti e strade sullo stabilimento delle costruzioni e delle macchine, di Navier. Parte 1^a, versione italiana con note ed aggiunte, e con un'appendice sui ponti sospesi, di C. d'Andrea. Un vol. in 8^o grande, 1836.</i>	D. 2,40
<i>Supplemento alle note ed aggiunte suddette, 1843.</i>	0,20
<i>Trattato elementare di Algebra. Un grosso vol. in 8^o, 1840.</i>	3,60
<i>Elementi di Algebra, 2^a edizione, un vol. in 8^o, 1848.</i>	1,30
<i>Prolusione per l'apertura della cattedra di meccanica applicata nel R. Collegio Militare, in 8^o, 1845.</i>	0,10
<i>Trattato elementare di aritmetica, 2^a edizione accresciuta dell'Aritmetica filosofica e di altri articoli importanti. Un vol. in 8^o</i>	0,60
<i>L'Aritmetica filosofica si vende separatamente</i>	0,10
<i>Elementi di aritmetica estratti dal Trattato per uso delle Scuole</i>	
Un vol. in 8 ^o .	0,40

Sotto i torchi

Elementi di Meccanica applicata alle costruzioni ed alle macchine. Volumi due in 8.^o grande.

CATECHISMO
DI
ARITMETICA

da servire

D'INTRODUZIONE ALLO STUDIO DELL' ARITMETICA

DI
CARLO D'ANDREA

Terza edizione.



NAPOLI
Reale Tipografia Militare
1850.



INTORNO ALL' USO DEL PRESENTE LIBRO

DISCORSO

È sistema quasi generale che i giovanetti sieno di buon' ora istruiti nelle operazioni pratiche sui numeri, affinchè fatti più adulti si trovino in possesso di quella speditezza di calcolo, senza la quale o bisognerebbe andar molto a rilento nello studio dell' Aritmetica teorica, o contentarsi che, conosciute teoricamente le operazioni, il bisogno di calcolare e il tempo compiano l'opera abbozzata. Nel primo caso il corso verrebbe talmente stemperato da intiepidirne il fervore e distruggerne l'*interesse*, e verrebbero rotti o considerevolmente allungati gli anelli che costituiscono la catena delle verità, e che è tanto più utile di mantenere stretti quanto più il giovane è fatto per islanciarsi innanzi nel campo della scienza. Nel secondo caso, la incapacità di eseguire i calcoli e di pervenire ai risultamenti del libro riesce scoraggiante, produce la noja, e il più delle volte è vaelevole a distogliere l'animo da siffatto studio.

Quindi questa anticipata istruzione sul calcolo pratico è lodevol cosa rispetto al fine, ma nè il mezzo nè il modo è sempre conducente. Imperocchè le regole pratiche non uniformandosi sempre con quelle che risultano

da una sana teorica, conviene di poi andarle modificando e vincere la resistenza che in generale s'incontra nel correggere le abitudini viziose. Ma oltre a ciò l'intelligenza del giovane che avrebbe bisogno di esser bellamente sviluppata secondando il movimento della natura, rimane schiacciata sotto il peso di un meccanismo opprimente; e quell'essere nato per divenire un uomo viene con violenza spinto contro corrente per formarne una macchina. Allora distrutta in lui la suscettività di ragionare, con la falsa persuasione di saper fare le operazioni sui numeri, non potrà o non vorrà più piegarsi a sentirne le dimostrazioni, di cui non sa e non può valutar l'importanza; e allora vi sarà bisogno per parte del maestro di grandissimo sforzo, di molta destrezza e di lunghissimo tempo per risvegliare un'intelligenza assopita, e metterla nel grado di attività necessaria per sentir la forza del ragionamento. Quindi il tempo che si era creduto di guadagnare, si perde a mille doppi, e si corre la ventura di non riuscir nell'impresa.

Per raggiunger lo scopo senza discapito è necessario modificar l'esposto sistema. I fanciulli nulla fanno senza ragionare; e coloro che ne hanno seguito lo sviluppo, avranno riconosciuto, che quelle cose che essi fanno e che ci cagionano tanta sorpresa sono la conseguenza di un raziocinio. La sola cosa cui è impossibile farli piegare è il meccanismo; la imitazione, alla quale sono tanto correvi, è l'effetto di un impulso interno che li spinge ad andare innanzi; nell'imitare ragionano; e quando la cosa che imitano si riduce ad operazione meccanica, nella quale la loro intelligenza non ha più parte, tosto se ne annojano e l'abbandonano. Quindi le operazioni pratiche sui numeri non s'imparano che a danno dell'intelligenza; fa mestieri che i giovanetti ragionino, ma le ragioni sieno proporzionate all'età.

Nel presente catechismo tutte le diverse operazioni sui numeri sono esposte secondo i veri principii della scienza, ed accompagnate da ragionamenti semplici e

brevi. Le dimostrazioni sono abbastanza rigorose, e forse non mancherà chi lo giudicherà sufficiente ancora per un corso di Aritmetica teoretica. Ma non è questo l'oggetto che si è avuto in mira; si richiede anzi che delle dimostrazioni se ne faccia tant'uso quanto ne comporta l'età; l'oggetto è di promuover lo sviluppo della mente nel tempo stesso che si acquista la facilità e la prontezza nel calcolo, d'istillarvi il gusto per la scienza, e di piegarla insensibilmente al ragionamento. Inoltre una dimostrazione lunga e precisa non sempre nell'età tenera scaturisce l'effetto desiderato. Le ragioni che si traggono dal proprio fondo producono maggiore soddisfazione di quelle che ci vengono dettate da altri. Il precettore attento e destro non si curerà di far approfondir le dimostrazioni, ma susciterà le difficoltà presentandole sotto diversi punti di vista; e senza usar violenza lascerà che l'allievo vi mediti e le risolva alla sua maniera. E un giovanetto pel quale la necessità delle dimostrazioni è divenuto un bisogno, che avrà incominciato ad astrarre e far le sue induzioni, avrà cominciato a pensare; e trovandosi ben preparato per intraprender con alacrità e forza di mente lo studio delle matematiche, avrà ottenuto tutto il vantaggio che da questo libro poteva sperarsi.

CATECHISMO

DI

ARITMETICA



NOZIONI PRELIMINARI

D. Che cosa è la *grandezza* o *quantità*?

R. È *grandezza* o *quantità* tutto ciò che è capace di aumento o di diminuzione.

D. In che modo si determina la variazione di una *grandezza*, e propriamente l'aumento o la diminuzione?

R. Si determina col confronto, il quale si fa sempre fra le *grandezze* della medesima specie, che si dicono anche *omogenee*. Per es. una linea si può paragonare a una linea, un peso a un peso, un tempo a un altro tempo, ec.

D. Qual è l'oggetto di questo paragone?

R. Le *grandezze* si paragonano ordinariamente per vedere in che modo una può esser formata per mezzo dell'altra, ripetendo un certo numero di volte tutta questa *grandezza* o una parte di essa.

D. Perché le *grandezze* di specie diversa non si possono paragonare?

R. Perché una *grandezza* di una data specie, ripetuta quante volte si vorrà, non può mai produrre una *grandezza* di altra specie; in effetti ripetendo una libbra non si può produrre un palmo. Due *grandezze* di specie diversa si dicono *eterogenee*.

D. Che cosa è l'*unità*?

R. L'*unità* è la *grandezza* alla quale si paragonano tutte quelle della medesima specie.

D. Che cosa è il *numero*?

R. Il numero è ciò che risulta dal paragone di una grandezza con la sua unità. Esso indica in che modo una grandezza data può esser formata per mezzo dell'unità.

D. Di quante specie sono i numeri rispetto alla loro natura?

R. Sono di due specie: *interi* e *frazionari*. I numeri interi risultano dalla riunione di più unità, e i numeri frazionari risultano dalla riunione di più unità e di porzioni di unità. I numeri frazionari possono esser maggiori o minori dell'unità.

D. Che cosa sono i numeri concreti e i numeri astratti?

R. Numeri *concreti* sono quelli ne' quali è nominata l'unità, e *astratti* quelli che non si riferiscono ad una unità determinata; per es. *cinque libbre* è un numero concreto, *sette* è un numero astratto.

ART. I.

DE' NUMERI INTERI.

§ 1. Sistema di numerazione.

D. Quanti sono i numeri?

R. I numeri sono infiniti; perchè a qualunque numero, per quanto grande sia, aggiungendo un'altra unità, si forma un numero più grande.

D. Come si è fatto per esprimere tutti i numeri per mezzo di poche parole?

R. Si sono distinti diversi ordini di unità, e ogni ordine comprende nove numeri solamente. Le unità del primo ordine si distinguono con le parole:

uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove; e ciascun numero si forma aggiungendo un'unità al precedente, perciò *quattro* e *uno* forma il numero *cinque*. Aggiungendo al nove un'unità si forma un'unità del secondo ordine, chiamata *diecina*; e si è contato per diecine come si era contato per unità semplici, dicendo:

dieci, venti, trenta, quaranta novanta.

Le unità del 3° ordine si sono chiamate *centinaja*, e si è contato per centinaja come per le altre unità, dicendo:

cento, duecento, trecento novecento.

Le unità del 4° ordine si chiamano *migliaja*; e si conta per *migliaja* nel modo stesso, dicendo: *mille, duemila, tremila*, ec.

Poi vengono le unità del 5° ordine che si chiamano *diecine di migliaja*, e si conta: *diecimila, ventimila* ec.; poi quelle del 6° ordine che sono le *centinaja di migliaja*, dicendo: *centomila, duecentomila*, ec. Le unità del 7° ordine si dicono *milioni*; poi vengono le *diecine* e le *centinaja di milioni*; poi i *bilioni* che sono le unità del decimo ordine, i *trilioni* che sono le unità del 13° ordine, e così di seguito.

I numeri intermedi si esprimono nominando separatamente tutti i diversi ordini di unità che contengono un numero.

Le sole collezioni di *diecine* e unità si esprimono con una sola parola: e perciò tre *diecine* e quattro unità si esprimono dicendo: *trentaquattro*. Ma sette *centinaja*, quattro *diecine* e due unità si esprimono col dire: *settecento quarantadue*.

Si vede dunque che le parole radicali che servono a nominare i numeri sono dodici: *uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, dieci, cento, mille*; e tutte le altre non sono che variazioni delle precedenti.

Ciò che conviene intender bene è: 1° che l'unità di un ordine contiene dieci unità dell'ordine inferiore; 2° che siccome alle unità, *diecine* e *centinaja* succedono le unità *diecine* e *centinaja di migliaja*, e poi le unità *diecine* e *centinaja di milioni*, ec., i diversi ordini di unità si possono unire in gruppi di tre ordini l'uno. I gruppi, ciascuna dei quali contiene unità *diecine* e *centinaja*, procedono con l'ordine seguente:

unità, migliaja, milioni, bilioni, trilioni, ec.; e si vede come con questo sistema di nomenclatura si può nominare qualunque numero, per quanto grande si voglia supporre.

D. In che consiste la numerazione scritta?

R. In un sistema per mezzo del quale con poche cifre si possono scrivere tutti i numeri possibili. Nella numerazione scritta si distinguono gli stessi ordini di unità, come nella numerazione parlata; e questi procedono con la stessa legge, la quale è che l'unità di un dato ordine vale dieci unità dell'ordine inferiore. I nove numeri contenuti in ciascun ordine si rappresentano sempre con le cifre seguenti:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
uno	due	tre	quattro	cinque	sei	sette	otto	nove

e l'ordine è indicato dal posto che una cifra occupa. I posti si contano andando dalla destra verso la sinistra. Perciò le unità semplici stanno al primo posto, le diecine o quelle del secondo ordine stanno al secondo posto, le centinaia al terzo posto, ec. Per collocare ciascuna cifra al posto che le compete si fa uso della cifra 0 (*zero*), la quale non ha alcun valore, ma serve per occupare il posto delle cifre che mancano. Così il numero 75004302 rappresenta 2 unità, 3 centinaia, 4 migliaia, 5 milioni e 7 diecine di milioni. Si vede che una cifra rappresenta sempre lo stesso numero di unità, ma l'unità è diversa secondo il posto in cui si trova la cifra. Questo sistema, adunque tanto mirabile quanto semplice, consiste nel dare alle cifre due valori; uno assoluto, l'altro di posizione.

D. Che s'intende per base del sistema di numerazione?

R. La base del sistema di numerazione è il numero che indica quante unità di un ordine sono necessarie per formare un'unità dell'ordine immediatamente superiore, o quanti caratteri sono necessari per rappresentare tutti i numeri possibili. Il nostro sistema, in cui la base è dieci, si dice *decimale*.

D. Come si leggono i numeri, e come si scrivono sotto la dettatura?

R. Per leggere, dovendo far uso del linguaggio, è necessario ravvicinare i numeri scritti alla numerazione parlata. Gioverà quindi dividerli in gruppi di tre cifre l'uno cominciando dalla destra; e ricordandosi che ogni gruppo contiene unità, diecine, e centinaia, e che l'ordine dei gruppi è unità, migliaia, milioni, ec., non si avrà nessuna difficoltà nel leggere un numero.

Per scrivere un numero sotto la dettatura basta fare attenzione a metter gli zeri dove mancano ordini di unità in qualche gruppo, e tre zeri nel caso che mancasse un gruppo intero. Così per esempio: 3 754 004 329 si legge 3 *bilioni*, 754 *milioni*, 4 *mila trecento ventinove*; e il numero: 7 *bilioni* 35 *mila* e 4, si scrive 7 000 035 004.

D. Che altro vi è da osservare intorno al sistema di numerazione e al modo di leggere i numeri?

R. L'uniformità del sistema permette di convertir facilmente le unità di un ordine in quelle di un altro inferiore. Così per es. il numero 54 rappresenta 5 diecine e 4 unità; ma di queste se ne formano subito *cinquantaquattro* unità;

vale a dire si esprime tutto per mezzo delle unità del primo ordine. Lo stesso ha luogo per qualunque altro numero. Per es. il numero 7329 si legge *settemila trecento ventinove* per esprimere tutto in unità del 1° ordine. Ma è chiaro che questo numero si potrebbe leggere 73 *centinaja* e 29 *unità*, o anche 732 *decine* e 9 *unità*. Parimente il numero 2375438, in vece di leggersi alla maniera ordinaria, si potrebbe classificare in diversi ordini di unità e leggere: 23 *centinaja di migliaia* e 75438 *unità*, o pure 237 *decine di migliaia* e 5438 *unità*, o pure 2375 *migliaja* e 438 *unità*, ec. Si potrebbe ancora classificare in più di due ordini, come per esempio: 237 *decine di migliaia*, 54 *centinaja* e 38 *unità*. Si vede dunque che le unità di ogni cifra possono considerarsi come le decine di quella che le sta innanzi, o come le centinaja di quella che precede la sua vicina, ec.

D. Che cosa è l'*Aritmetica*?

R. È la scienza che esamina le proprietà dei numeri per combinarli tra loro, ossia per farvi le *operazioni*.

D. Quali sono le operazioni principali che si fanno sui numeri?

R. Sono quattro: l'*addizione*, la *sottrazione*, la *moltiplicazione* e la *divisione*.

§ II. Dell' *addizione*.

D. Che cosa è l'*addizione*?

R. È un'operazione mediante la quale più numeri si riuniscono in un solo che contenga tante unità quante ne contengono i numeri dati. Il risultamento dell'operazione si chiama *somma*.

D. Quali sono i numeri che possono sommarsi?

R. Quelli della stessa specie ed espressi con la stessa unità. Perciò 3 libbre non si possono sommare con 7 palmi, perchè sono numeri di specie diversa. Parimente 3 *centinaja* non si possono sommare con 2 unità, quantunque si riferissero a grandezze della stessa specie; ma per sommarle fa d'uopo delle 3 *centinaja* farne 300 unità, e allora si potranno sommare 300 unità con 5 unità, e si avrà per somma 305 unità.

D. Come si fa l'addizione di due numeri semplici?

R. Si fa aggiungendo ad uno de' numeri dati tante unità l'una dopo l'altra, quante ne contiene l'altro. Così, 8 e 5 si sommano aggiungendo a 8 cinque volte di seguito l'unità, e si ha 13. Basta un breve esercizio per imparare a far a memoria queste addizioni.

D. Come si fa l'addizione dei numeri composti di più cifre?

R. Siccome ogni cifra presa isolatamente si riferisce ad un'unità diversa, si faranno tante somme parziali quante sono le cifre che essi contengono, sommando separatamente le unità fra loro, le diecine fra loro, ec. Se alcuna di queste somme risulta di due cifre, si scrivono le unità proprie e le diecine si riuniscono alla colonna seguente, facendo ciò che si chiama *riporto*. Nell'es. posto a lato la somma delle

3543	unità è 21, si scrive 1 e il 2 si riunisce alla somma delle
7328	ma delle diecine. Questo 2 è il riporto. La somma
6733	delle diecine insieme col riporto è 20; si scrive 0
140	e si porta 2. La somma delle centinaia è 18; si
57	scrive 8 e si riporta 1. Così di seguito.

17801 Per veder meglio le cifre dello stesso ordine, si scrivono i numeri l'uno sotto l'altro, e ogni somma s'incomincia dal riporto per non dimenticarlo.

§ III. Della sottrazione.

D. Che cosa è la sottrazione?

R. È l'operazione contraria o inversa dall'addizione. Nell'addizione si aggiungono ad un numero tante unità quante ne contiene un altro, e nella sottrazione si tolgono da un numero più grande tante unità quante ne contiene uno più piccolo. Il risultamento dell'operazione si chiama *resto*. Per es. per sottrarre 5 da 8, bisogna toglier da 8 successivamente 5 unità, e ciò che rimane, ossia 3, è il resto. Questa operazione può anche farsi aggiungendo tante unità al 5 quante sono necessarie per arrivare a 8, e allora 3 esprime l'*eccesso* di 8 sopra 5. Con questa operazione si conosce ancora che le due quantità rappresentate da 8 e da 5 non sono eguali, e che 3 è la loro *differenza*.

D. Come si fa la sottrazione de' numeri composti da più cifre.

R. Si fa operando separatamente sopra ciascun ordine di unità, cioè togliendo le unità dalle unità, le diecine dalle

diecine, ec.; e se le unità del numero superiore non bastano, si stacca un'unità dalla cifra a sinistra, la quale somministra dieci unità dell'ordine inferiore. Così nell'esempio posto a lato si dirà: *da 5 tolto 3 resta 2, da 6 tolto 6 resta 0, da 8 tolto 3 resta 5*: da 2 non si può toglier 5, perciò si staccherà un'unità dalla cifra seguente, la quale unita al 2 forma 12; quindi *da 12 tolto 5 resta 7*; la cifra 3 è divenuta 2, e siccome da 2 non si può toglier 7, si dirà: *da 12 tolto 7 resta 5*; infine *da 6 tolto 4 resta 2*.

D. Come bisogna regularsi quando nel numero superiore vi sono molti zeri che si succedono?

R. In tal caso l'unità da staccarsi si va a prendere dalla prima cifra che si presenta dopo gli zeri; e allora questa cifra resterà con un'unità di meno, gli zeri che la seguono varranno tutti per 9, e il primo zero (andando dalla destra verso la sinistra) varrà 10 se non deve somministrar nessuna unità alla cifra che lo precede, in caso contrario varrà anch'esso per 9. Nell'esempio qui posto, la prima cifra del numero superiore vale 13, ciascuno de' due zeri si conta per 9, e il 7 diviene 6.

Se il numero superiore è formato dall'unità seguita solo da zeri, la sottrazione si fa immediatamente riguardando il primo zero a destra per 10, e tutti gli altri per 9. Così nell'esempio posto in margine si dirà: *da 10 tolto 2 resta 8, da 9 tolto 3 resta 6, da 9 tolto 4 resta 5*, ec.

D. In qual altro modo si fa la sottrazione?

R. Salendo dal numero inferiore al superiore; in questo caso si riportano al numero inferiore le diecine che si ottengono nel numero superiore, operando nel modo stesso come se si facesse l'addizione. Così nell'es. qui annesso si dirà: *da 3 a 5 è 2* e si scrive il 2; *da 6 a 6 è zero* e si scrive 0; *da 3 a 8 è 5* e si scrive 5; poi da 5 si salirà al primo numero terminato da 2 che è 12; e si dirà: *da 5 a 12 è 7*, si scrive 7 e si riporta 1, in seguito: *7 più 1 che si porta fa 8, a 13 è 5*, e si scrive 5; *4 più 1 che si porta fa 5, a 7 è 2*, e si scrive 2.

§ IV. Della Moltiplicazione.

D. In che consiste la moltiplicazione de' numeri interi?

R. La moltiplicazione de' numeri interi ha per oggetto

di ripetere un numero tante volte quante unità contiene un altro. Il numero che si ripete si chiama *moltiplicando*, quello che indica quante volte si deve ripetere si chiama *moltiplicatore*; e quello che si ottiene, *prodotto*. Il moltiplicando e il moltiplicatore si chiamano i *fattori* del prodotto. Così se 5 è il moltiplicando e 3 il moltiplicatore, il prodotto sarà uguale a 5 ripetuto 3 volte, ed eguaglia la somma di tre numeri eguali a 5, cioè 15. I numeri 3 e 5 sono i fattori di 15.

I numeri che nascono dalla ripetizione dello stesso numero si chiamano i *moltiplici* di quel numero. Così 6, 9, 12, ec. che nascono aggiungendo sempre il 3, sono i moltiplici di 3; ed equivalgono ai prodotti di 3 per 2, per 3, per 4, ec.

D. Come si fa la moltiplicazione di un numero semplice per un altro numero semplice?

R. Non vi è nessuna regola, e perciò bisogna imparare questi prodotti a memoria. Per render più facile questo esercizio è utile servirsi della tavola di Pitagora, che è la seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La prima linea contiene i numeri naturali da 1 fino a 9; la seconda, i prodotti degli stessi numeri per 2; la terza i prodotti per 3, ec. Si voglia per es. il prodotto di 6 per 8; si cercherà il 6 nella prima linea, poi si vedrà nella linea de' prodotti per 8 quale numero corrisponde al 6 e si troverà 48, il che equivale a cercare il 6 nella prima linea orizzontale e l'8 nella prima linea verticale; poi si percorrono le linee del 6 e dell'8, e il numero posto nel luogo dove queste linee s'incontrano sarà il prodotto cercato.

D. Quale proprietà risulta dalla tavola di Pitagora?

R. Che nel fare il prodotto di due numeri astratti, qualunque di essi si prenda per moltiplicando, il prodotto è sempre lo stesso. Così, tanto è moltiplicare 4 per 5, quanto 5 per 4. E siccome non vi è ragione per limitare questa tavola al numero 9, ma potrebbe esser prolungata a volontà, la stessa proprietà deve sempre aver luogo.

D. Come si fa la moltiplicazione quando il moltiplicando è di più cifre e il moltiplicatore è di una sola cifra?

R. Si fa ripetendo successivamente ciascuna cifra del moltiplicando tante volte quante unità contiene il moltiplicatore; si avranno così tanti prodotti parziali quante sono le cifre del moltiplicando, e ogni prodotto parziale sarà dello stess'ordine della cifra del moltiplicando su cui si opera. Per es. si debba moltiplicare 358 per 7; si faranno i prodotti di 8 unità per 7, di 5 decine per 7 e di 3 centinaia per 7, e il prodotto totale si comporrà di 56 unità, 35 decine, e

$\begin{array}{r} 358 \\ 7 \\ \hline 56 \\ 35 \\ 21 \\ \hline 2506 \end{array}$	$\begin{array}{r} 358 \\ 7 \\ \hline 2506 \end{array}$	21 centinaia. Ma è chiaro che di ogni prodotto basta scrivere le unità e riportar le decine al prodotto seguente. Si dirà dunque: 7 per 8 fa 56, si scrive 6 e si riporta 5; poi 7 per 5 fa 35 e 5 che si porta fa 40, si scrive 0 e si porta 4; poi 7 per 3 fa 21 e 4 che si porta fa 25, il quale per esser l'ultimo si scrive tutto.
---	--	--

D. Come si fa la moltiplicazione quando anche il moltiplicatore è di più cifre?

R. Si fa il prodotto del moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, e i prodotti si riguardano come espressi per unità dello stess'ordine della cifra del moltiplicatore che si sta adoperando. In effetti sia da moltiplicarsi 547 per 394. Si è dimostrato che il prodotto è lo stesso qualunque di questi numeri si prenda per moltiplicando. Ora se fosse 394 il moltiplicando, il prodotto sarebbe composto dal prodotto di 547 per 4, di 547 per 9, e di 547 per 3, il primo dei quali darebbe unità, il secondo decine, il terzo centinaia; dunque anche quando 394 è il moltiplicatore, basta moltiplicare il 547 per le cifre successive del moltiplicatore e considerar ciascun prodotto parziale come esprimente unità dello stesso ordine della cifra del moltiplicatore che la produce; cioè si moltiplica il moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, e si mette la prima cifra di ogni prodotto

parziale nello stesso luogo dove si trova la cifra del moltiplicatore che si sta adoperando. Ecco alcuni esempi.

547	7540736
394	60073
2188	22622208
4923	52785152
1641	45244416
215518	452994633728

D. Vi sono altre osservazioni da fare intorno alla moltiplicazione?

R. Vi è un'osservazione importante che è la seguente. Se i numeri dati son terminati da zeri, si farà il prodotto come se gli zeri non vi fossero, e poi se ne aggiungeranno tanti a destra del prodotto, quanti son quelli dai quali i fattori son terminati.

In effetti, se il moltiplicando solo fosse terminato da zeri, siccome il prodotto dev'esser dello stesso ordine del moltiplicando, dovrà terminare con tanti zeri, quanti ne contiene il moltiplicando. Se anche il moltiplicatore è terminato da zeri, il prodotto deve avanzar di tanti altri posti, quanti sono quelli di cui si trova avanzata la prima cifra del moltiplicatore, il che si ottiene aggiungendo altri zeri. Perciò il prodotto deve esser terminato da tanti zeri, quanti son quelli che terminano i due numeri dati. Ecco un esempio.

$$\begin{array}{r}
 3754000 \\
 280 \\
 \hline
 30032 \\
 7508 \\
 \hline
 1051120000
 \end{array}$$

§ V. Della divisione.

D. Che cosa è la divisione de' numeri interi?

R. È un'operazione che serve a dividere un numero in tante parti eguali quante unità contiene un altro, o pure in parti eguali a un numero dato. Il numero che si deve dividere si chiama *dividendo*, quello che indica in quante parti si deve dividere, o pure quanta dev'esser ciascuna parte, si chiama *divisore*, e il numero che si ottiene si dice *quo-*

ziente. Per es. se si domanda di divider 64 in 16 parti eguali, o pure di divider 64 in parti eguali a 16, 64 è il dividendo e 16 il divisore. Si vede pure che per risolvere la quistione, bisognerebbe o sottrarre il 16 dal 64 quante volte si può, o ripetere il 16 tante volte finchè formi il 64; nell'una o nell'altra maniera si ottiene 4, che è il *quoziente*, il quale indica che 64 si compone di 16 parti eguali a 4 o di 4 parti eguali a 16. Questa operazione corrisponde a trovare un numero che moltiplicato per il divisore riproduca il dividendo; e perciò si deve considerare il dividendo come la somma di tutti i prodotti parziali che risultano moltiplicando il divisore per le cifre successive del quoziente. Si vede che la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, perchè mentre con la moltiplicazione si compone il prodotto per mezzo de' suoi fattori, con la divisione si scompone in fattori un prodotto di cui è dato un fattore.

$$\begin{array}{r}
 3758965 \overline{) 7} \\
 \underline{35} \\
 25 \\
 \underline{21} \\
 48 \\
 \underline{42} \\
 69 \\
 \underline{63} \\
 66 \\
 \underline{63} \\
 35 \\
 \underline{35} \\
 0
 \end{array}$$

D. Come si fa la divisione, allorchè il divisore è di una sola cifra?

R. Per dichiararlo, ci varremo del qui annesso esempio. Sicecome la prima cifra 3 non contiene 7, si prendono due cifre cioè 37, e si esamina quante volte 37 contiene 7. Si conosce dalla tavola di Pitagora, o pure si è imparato a memoria, che 7 entra in 37 5 volte, quindi la prima cifra del quoziente sarà 5. Moltiplicando 7 per 5 si ha 35 che si sottrae da 37, perchè la prima cifra 5 è dello stess'ordine di 37, e si ha per resto 2. Calando la cifra 5, cioè mettendo a fianco del 2 il 5, il che corrisponde a considerare il resto 2 come le diecine della cifra che segue, si ha un altro dividendo parziale che è 25 diecine di migliaia. Si divide 25 per 7 e si ha per quoziente 3, e sicecome gli ordini di unità si succedono allo stesso modo nel dividendo e nel quoziente, si scrive la cifra 3 a lato del 5 già trovato; poi si moltiplica il 7 per 3, il prodotto 21 si sottrae dal dividendo parziale 25, e si ha il resto 4; si cala la cifra seguente 8 e si ha il terzo dividendo parziale 48; e così si continuerà.

Quest'operazione si può far facilmente a memoria senza scrivere nè i prodotti nè i resti. L'esecuzione può essere accompagnata dal seguente discorso. *Il 7 in 37 entra 5 volte*

Quest'operazione si può far facilmente a memoria senza scrivere nè i prodotti nè i resti. L'esecuzione può essere accompagnata dal seguente discorso. *Il 7 in 37 entra 5 volte*

e resta 2 che col 5 fa 25; il 7 in 25 entra 3 volte e resta 4 che posto a fianco dell'8 fa 48; e così di seguito.

D. Come si fa la divisione quando il divisore è di più cifre?

R. Si forma il primo dividendo parziale staccando a sinistra del dividendo il minimo numero di cifre necessarie per contenere il quoziente; poi l'operazione procederà con la stessa regola, nè s'incontrerà altra difficoltà che quella di determinare quante volte il divisore è contenuto in ciascun dividendo parziale. Così nell'esempio qui posto il primo dividendo parziale è 5083 e il quoziente 5; si moltiplica 872 per 5 e il prodotto 4360 a misura che si forma si scrive sotto il dividendo parziale 5083, da cui si sottrae, e si ha per resto 723. Le unità di questo resto debbono considerarsi come le diecine della cifra che segue; quindi calando questa cifra, cioè 7 si ha il secondo dividendo parziale 7237, e poi l'operazione continuerà sempre nel modo stesso.

Si è scritto per prima cifra del quoziente 5. Ma per determinare con esattezza la cifra del quoziente, si esaminerà quante volte la prima cifra del divisore è contenuta nelle prime due cifre del dividendo e si troverà che vi è contenuta 6 volte. Se 6 fosse cifra esatta, bisognerebbe che 5083 contenesse i prodotti di 6 per le tre cifre del divisore. Ora il prodotto di 6 centinaja per 8 sottratto da 50 centinaja dà per resto 283, il quale dovrebbe contenere gli altri due prodotti di 6 per 7 e di 6 per 2; ma il prodotto di 6 diecine per 7 è maggiore di 28 diecine, perciò la cifra 6 è troppo grande. Presa per quoziente la cifra 5, e ripetuto lo sperimento, riesce; dunque 5 è cifra esatta.

Sia per un altro esempio da esaminarsi quante volte 31716 contiene 3986. Si dirà: 1/ 3 in 31 entra 9 volte; il prodotto di 9 per la prima cifra 3 del divisore dà 27; questo sottratto da 31 dà per resto 4, il quale unito alle cifre seguenti forma 4716 che diviso per 986 dovrebbe dar pure per quoziente 9. Ma 47 non contiene 8 nove volte, perciò la cifra 9 è troppo grande. Si prenda 8 e si dica: 3 in 31 entra 8 volte e resta 7 che messo vicino al 7 fa 77; 77 diviso per 9 dà pure per quoziente 8 e per resto 5; che messo vicino all'1 fa 51; 51 diviso per 8 non dà per quoziente 8; perciò la cifra 8 dev'esser diminuita di un'altra unità. Si sperimenti il 7. Il 3 in 31 fatto entrar 7 volte dà

per resto 10, che messo vicino al 7 fa 107 e questo contiene la seconda cifra del divisore molto più di 7 volte. Si osservi che quando uno de' resti che dà questa operazione è maggiore di 9, come avviene in questo caso, è inutile continuare la pruova, perchè tutti i resti risulterebbero maggiori delle cifre seguenti del divisore.

D. Come si fa la divisione compendiosa?

R. Si fa risparmiando di scrivere i prodotti e facendo la sottrazione nell'alto stesso che si fa la moltiplicazione. Questa operazione riesce facilissima, allorchè si fa la sottrazione da sotto in sopra, cioè salendo dal numero dato dal prodotto parziale a quello immediatamente superiore. Così nell'esempio qui annesso il primo dividendo è 4537673; trovata la prima cifra 5169501 | 7 del quoziente, si dirà: 7 per 9 fa 63 fino a 63 è 0; si scrive 0 e si riporta 6; 7 per 8 fa 56 e 6 che si porta, 62, fino a 67 è 5; si scrive 5 e si riporta 6; 3 per 7 fa 21 e 6 fa 27, a 36 è 9; si scrive 9 e si porta 3; 4 per 7 fa 28 e 3 fa 31, a 37 è 6; si scrive 6 e si porta 3; 7 per 7 fa 49 e 3 fa 52, fino a 53 è 1; si scrive 1 e si porta 5; 5 per 7 fa 35 e 5 fa 40, a 45 è 5; il quale si scrive senza altro. Calata l'altra cifra si ha il secondo dividendo parziale, su cui si opererà nel modo stesso.

D. Quali cose sono da avvertirsi nella divisione?

R. Cinque cose:

1°. Se un dividendo parziale non contiene il divisore, bisogna scrivere zero nel quoziente e calar la cifra seguente;

2°. Il resto dev'essere minore del divisore;

3°. Ogni quoziente parziale dovendo esser di una sola cifra non può esser maggiore di 9;

4°. Se il dividendo e il divisore sono terminati da zeri, se ne può cancellare un egual numero nell'uno e nell'altro, perchè ciò riducesi a cambiare il nome dell'unità, la quale non ha nessuna influenza sul valore del quoziente. Per es. tanto è divider 475000 per 3200 quanto 4750 per 32; perchè tanto è divider 4750 centinaja per 32 centinaja, quanto 4750 unità per 32 unità.

5°. Quando la divisione si fa esattamente, il dividendo è uguale al quoziente moltiplicato per lo divisore, più il resto.

DE' DECIMALI.

D. Che cosa sono i decimali ?

R. Per formarsi un'idea esatta de' decimali, basta estendere il sistema di numerazione a rappresentar parti minori dell'unità. Si è detto che un numero può leggersi in molte maniere, fermandosi a quell'unità che si vuole; per esempio 47538 si può leggere 47 migliaia e 538 unità. Ora col leggere in questo modo si ha manifestamente intenzione di prender come unità principale il migliajo, e allora la cifra 5 posta a destra di questa nuova unità ha un valore dieci volte più piccolo di essa, la cifra 3 posta a destra ha un valore dieci volte più piccolo della cifra precedente, e così di seguito. Quindi se veramente si volesse cambiare unità, non si dovrebbe far altro che cambiare il vocabolo, e il valore relativo di ciascuna cifra non cambierebbe. Perciò, ritenendo sempre che ogni cifra posta a destra di un'altra si riferisce ad un'unità 10 volte più piccola, basta in una serie di cifre scritte fissar con un segno il posto dell'unità principale, e allora la cifra posta a destra delle unità ha un valore 10 volte più piccolo e rappresenta *decimi*, quella a destra de' decimi, *centesimi*; quella a destra de' centesimi rappresenta *millesimi*, e così di seguito. Quindi come il numero precedente si leggeva 47 migliaia e 538 unità, ora si leggerà 47 unità e 538 millesimi. Per indicar con un segno il posto dell'unità, la cifra dell'unità si fa seguir da una virgola, e si scrive 47,538. Ma è chiaro che conosciuta la denominazione dell'unità cui si riferisce l'ultima cifra, quel numero si può leggere ancora: 475 *decimi* e 38 *millesimi*, 4753 *centesimi* e 8 *millesimi*, o pure 47538 *millesimi*.

D. Qual è la regola per leggere e scrivere i decimali secondo la maniera comune ?

R. Si leggono prima gl'interi, e poi si leggono i decimali anche come se fossero interi, e si dà la denominazione all'ultima delle cifre decimali, prendendola dall'unità seguita da tanti zeri, quanti sono i posti che occupano le cifre decimali e dandovi la desinenza in *esimi*. Così 5,00043 si legge: 5 *interi* e 43 *centomillesimi*. La stessa regola vale per scriverli; cioè si scriveranno gl'interi e poi rispetto ai decimali si occuperanno tanti posti, quanti zeri sono neces-

sari per esprimer la denominazione dell'unità dell'ultima cifra. Per es. si debba scrivere *2 interi e 53 millesimi*; siccome 1000 vuole tre zeri, 53 deve occupare tre posti, e si scriverà 2,053.

Se mancano gl'interi, si metterà un zero in luogo di essi; perciò il numero 0,097 si legge: *zero interi e 97 millesimi*.

D. Gli zeri posti a destra o a sinistra di un numero che contiene cifre decimali alterano il valore del numero?

R. Quando in un numero dopo le unità è scritta la virgola, si possono aggiungere a destra o a sinistra quanti zeri si vorrà, e il numero non cambia valore appunto perchè niuna delle cifre cambia posto. Così il numero 13,047 è lo stesso che 0013,047000, e il numero 754 non differisce da 754,0000.

D. In quale caso un numero cambia valore, anche senza cambiar le cifre?

R. Un numero cambia valore trasportando la virgola. In effetti per ogni posto che percorre la virgola da destra verso sinistra, tutte le cifre cambiano posto e il numero si rende dieci volte più piccolo; e viceversa per ogni posto che percorre da sinistra verso destra si rende 10 volte più grande. Così i numeri 2,0472, 20,472, 204,72, ec. sono l'uno dieci volte più grande del precedente; e i numeri 2,0472, 0,20472, 0,020472, sono l'uno dieci volte più piccolo del precedente. Ma rendere un numero dieci volte più grande o più piccolo significa moltiplicarlo o dividerlo per 10; perciò si moltiplica un numero per 10, 100, 1000, ec. trasportando la virgola da sinistra verso destra di un posto, o di due, o di tre, ec.; e viceversa si divide per 10, 100, 1000, ec. trasportando la virgola da destra verso sinistra di tanti posti, quanti zeri contiene il divisore. (*)

D. Come si fa l'addizione de' decimali?

R. L'addizione dei decimali si fa come quella degli interi, cioè si opera sulle unità dello stesso ordine: ba-

(*) Si tenga presente che in qualunque numero la moltiplicazione e la divisione per 10, 100, 1000, ec. si opera immediatamente trasportando la virgola e aggiungendo zeri se occorrono; e il far queste operazioni come si farebbero con gli altri numeri, cosa alla quale facilmente s'incorre, mostrerebbe poca conoscenza del sistema di numerazione, e cagionerebbe perdita di tempo, perchè, secondo si suol dire, *l'unità non moltiplica nè divide*.

sta perciò scrivere i numeri in modo che la virgola di ciascun numero si trovi nella stessa linea verticale, e poi si fa l'addizione come nei numeri interi cominciando dalla
 37,543 prima cifra a destra e facendo il riporto come se
 2,0478 la virgola non vi fosse. Ecco un esempio.
 6,0029 La somma de' decimi col riporto è 13; si scri-
 1,728 ve 3 e si riporta 1 alla colonna delle unità come
 47,3217 se la virgola non vi fosse.

D. Come si fa la sottrazione de' decimali?

R. Si fa come quella dei numeri interi. Si deve solo avvertire, che quando le cifre del numero superiore fossero minori di quelle dell'inferiore, si rendono eguali coll'aggiungere gli zeri necessari; siccome si vede nell'annesso esempio, nel quale si sono aggiunti tre zeri al numero superiore.
 Gli zeri si possono anche aggiunger mentalmente. Così
 2, per sottrarre 0,47329 da 2 si scriverà nel modo che qui si vede; imperciocchè lo scrivere
 0,47329 gli zeri è una vera perdita di tempo.
 1,52671

D. Come si fa la moltiplicazione de' decimali?

R. Se il moltiplicatore è numero intero, si fa l'operazione come nei numeri interi; ma siccome si tratta di ripetere il moltiplicando tante volte quante unità contiene il moltiplicatore, le unità del prodotto saranno dello stess'ordine di quelle del moltiplicando; e perciò si metterà la virgola nello stesso luogo dove si trova nel moltiplicando.

Se poi anche il moltiplicatore contiene cifre decimali si farà la moltiplicazione come se la virgola non vi fosse, e poi si staccheranno dal prodotto tante cifre decimali quante ne contengono i due numeri dati. Perciò nell'esempio qui posto è fatta la moltiplicazione come se i numeri fossero interi e poi nel prodotto si sono staccate sette cifre decimali quante sono quelle dei due numeri dati prese insieme.

Per convincersi dell'esattezza di questa regola, basta osservare che il prodotto del moltiplicando per le unità del moltiplicatore dà cifre dello stess'ordine di quelle del moltiplicando; e poi tutti gli altri

prodotti parziali avanzano o retrocedono secondo che le cifre corrispondenti del moltiplicatore si trovano avanzate o retrocedute rispetto all'unità. Quindi basterebbe scrivere le unità del moltiplicatore sotto la prima cifra del moltiplicando, cominciare a scrivere la prima cifra di ogni prodotto parziale nello stesso luogo dove si trova la cifra corrispondente del moltiplicatore, e collocare la virgola al di sotto di quella del moltiplicando. Così dal modo come nell'esempio sono scritti la seconda volta i prodotti parziali apparisce che, essendo la seconda linea il prodotto del moltiplicando per le unità del moltiplicatore, tutti gli altri prodotti parziali sono collocati rispetto a questo come sono le cifre del moltiplicatore rispetto all'unità. La seconda volta i prodotti parziali sono scritti in ordine inverso, il che torna allo stesso.

D. Come si fa la divisione dei decimali quando il divisore è numero intero?

R. Si fa come se i due numeri fossero interi; ma siccome le cifre del quoziente sono dello stesso ordine di quelle dei dividendi parziali, si metterà la virgola nel quoziente appena si cala la prima cifra decimale. Così nell'esempio qui posto, si mette la virgola nel quoziente quando si cala la cifra 5 de' decimi, e poi si continua l'operazione come negl'interi. Si avverta che siccome alla destra de' decimali si possono aggiungere quanti zeri si vorranno, la divisione si può prolungare quanto è necessario. La stessa osservazione vale anche quando il dividendo è numero intero.

$$\begin{array}{r|l}
 37,543 & 29 \\
 85 & 1,29458 \\
 274 & \\
 133 & \\
 170 & \\
 250 & \\
 18 &
 \end{array}$$

In effetti se si tratta di dividere 6438 per 272, il dividendo si può considerare come se fosse 6438,0000... il che permette di prolungar l'operazione secondo il bisogno.

D. Come si fa la divisione de' decimali quando il divisore contiene cifre decimali?

R. Si riduce il divisore a numero intero sopprimendo la virgola, e poi nel dividendo si trasporta la virgola di tanti posti verso la destra quante cifre decimali conteneva il divisore. Così la divisione di 83,47 per 2,5873 si riduce a quella di 834700,00... per 25873, quella di 6,343296 per 7,838 si riduce all'altra di 6343,296 per 7838. In effetti col trasportare la virgola non si fa che cambiare il no-

me dell'unità, il che non influisce sul valore del quoziente, siccome altra volta si è detto.

D. Quali vantaggi offrono i decimali nella divisione?

R. Uno de' vantaggi è, che potendosi alla destra di un numero aggiunger quanti zeri si vorranno, purchè siasi messa la virgola dopo le unità, si potrà prolungare la divisione quanto si vorrà; e allora non solamente qualche volta si può giungere a un quoziente esatto, siccome si vede nell'esempio qui posto, ma in ogni caso si ottiene un quoziente tanto più approssimato, quanto più si spinge innanzi l'operazione.

Il secondo vantaggio si scopre dall'osservare che nel dividere 543,296 per 7838 il primo dividendo parziale è 54329; e siccome rappresenta centesimi, la prima cifra del quoziente sarà centesimi. Perciò i decimali offrono anche il mezzo di dividere un numero più piccolo per uno più grande. Così pure dovendo divider 7 per 892, siccome il primo dividendo parziale è 7000

7,00000... | 892
7560 | 0,007
millesimi, la prima cifra del quoziente sarà millesimi.

Art. III.

DELLE FRAZIONI (*).

D. Come si esprimono i numeri frazionari?

R. I numeri frazionari, essendo quelli che contengono delle porzioni dell'unità, non si possono esprimere col ripetere l'unità principale un certo numero di volte. È necessario perciò ricorrere ad un'unità più piccola dalla cui ripetizione possa risultare il numero frazionario proposto.

(*) In seguito si farà uso qualche volta di alcuni segni, di cui ecco il significato:

Il segno + indica la somma e si pronunzia *più*.

Il segno — indica la sottrazione e si pronunzia *meno*.

Il segno $\times$ o pure un *punto* indica moltiplicazione, e si legge *moltiplicato per*.

Il segno : indica divisione, e si legge *diviso per* . . .

Il segno = indica l'eguaglianza di due numeri, e si legge *eguale*.

D. Come si scrivono i numeri frazionari?

R. Si scrivono con due numeri, uno il quale serve ad indicare, la nuova unità che parte è dell'unità principale, l'altro che indica quante volte questa nuova unità è ripetuta. Il primo si chiama *denominatore*, il secondo si chiama *numeratore*; e questi due numeri si scrivono l'uno sotto l'altro separati da una linea, cioè il numeratore al di sopra del denominatore, e tutti due sono i *termini* della frazione. Così l'espressione $\frac{3}{7}$ indica 3 unità sette volte più piccole dell'unità principale: 3 è il numeratore e 7 il denominatore. Perciò si può riguardare il numeratore come un numero intero, e il denominatore come un segno per conoscere di quanto l'unità, cui il numeratore si riferisce, è più piccola dell'unità principale.

D. Come si leggono i numeri frazionari?

R. Leggendo il denominatore alla maniera degl'interi, e poi leggendo il numeratore al modo de' numeri ordinali, cioè con la desinenza in *esimi* e con quelle eccezioni che comporta la lingua. Così $\frac{2}{5}$ si legge *due quinti*; $\frac{7}{9}$ si legge *sette noni*, $\frac{23}{16}$ si legge *ventitre sedicesimi*, cc.

D. Data l'unità principale, come si fa per avere il valore del numero frazionario?

R. Bisogna divider l'unità in tante parti eguali, quante ne indica il denominatore (il che serve a trovar la nuova unità), e poi prenderne tante quante sono le unità del numeratore. Così se si ha $\frac{5}{7}$, bisogna divider l'unità in 7 parti e di queste prenderne 5. Quindi la frazione $\frac{5}{7}$ indica ancora l'unità divisa in 7 parti delle quali se ne prendono 5. Ma dividere ciascuna unità del numeratore in 7 parti eguali e poi riunire i risultamenti è lo stesso che dividere il 5 in 7 parti eguali; perciò $\frac{5}{7}$ è l'indicazione della divisione di 5 per 7.

D. Quando un numero frazionario è maggiore, eguale o minore dell'unità?

R. Quando il numeratore è maggiore del denominatore il numero è maggiore di 1; quando il numeratore è eguale

al denominatore, il numero è eguale all'unità; e quando il numeratore è minore del denominatore, il numero è minore di 1 e si chiama *frazione*. E siccome un numero frazionario è una divisione indicata, ne segue che in ogni divisione il quoziente è maggiore di 1 se il dividendo è maggiore del divisore, è uguale a 1 se il dividendo è eguale al divisore, e minore di 1 se il dividendo è minore del divisore.

D. Da un numero frazionario come si ricavano gl'interi?

R. Dividendo il numeratore per il denominatore, cioè effettuando la divisione indicata. Il quoziente darà gl'interi, e il resto, che è la parte che non può esser divisa, darà il numeratore della frazione che rimane. Sia il numero $\frac{215}{23}$: dividendo 215 per 23 si ha per quoziente 9 e per resto 8; perciò $\frac{215}{23}$ si riduce a $9\frac{8}{23}$.

Viceversa, un intero e una frazione si riducono a un sol numero frazionario, eseguendo un'operazione contraria alla precedente, cioè *moltiplicando l'intero per il denominatore della frazione, aggiungendo a questo prodotto il numeratore, e poi dando a questa somma lo stesso denominatore*. In effetti il dividendo è eguale al quoziente moltiplicato per il divisore più il resto; e perciò $9\frac{8}{23}$ si riduce a $\frac{215}{23}$ col moltiplicare 9 per 23 e aggiungere 8 al prodotto.

D. Come si riduce un intero ad una frazione di un dato denominatore?

R. Moltiplicando l'intero per il denominatore. Per es. 7 si riduce ad una frazione che ha per denominatore 3, scrivendo $\frac{21}{3}$. In effetti $\frac{21}{3}$ è una divisione indicata; effettuandola, si ritrova 7.

Si avverta che ad un intero si dà la forma di frazione dandogli per denominatore 1. Così 5 è lo stesso che $\frac{5}{1}$.

D. Che differenza passa tra i decimali e le frazioni ordinarie?

R. Le cifre decimali de' numeri sono anche frazioni ; ma il denominatore dovendo esser uno de' numeri 10, 100, 1000, ec. non vi è bisogno di scriverlo, perchè l'unità cui si riferisce il numero è indicata dal posto ; perciò questi numeri si scrivono alla maniera de' numeri interi, e danno al sistema di numerazione tutta l'estensione possibile.

D. Quali sono le proprietà delle frazioni ?

R. Per conoscere le proprietà delle frazioni, bisogna ricordarsi che moltiplicare un numero per un altro, per es. per 7, significa renderlo 7 volte più grande, ovvero riferirlo ad un'unità sette volte più grande ; similmente dividere un numero per un altro, per es. per 5, significa renderlo 5 volte più piccolo, ovvero riferirlo ad un'unità 5 volte più piccola.

Ciò posto, il denominatore, essendo un segno destinato a rappresentare l'unità cui si riferisce il numeratore, allorchè si lascia invariato, l'unità non cambia, e quindi le operazioni fatte sul numeratore producono lo stesso effetto che sugl' interi, cioè : *moltiplicando o dividendo il numeratore senza toccare il denominatore si moltiplica o si divide la frazione.*

Al contrario l'unità cui si riferisce il numeratore è tanto più piccola quanto più grande è il denominatore, e viceversa ; e di più raddoppiando il denominatore la detta unità diviene la metà di quella che era, triplicandolo diviene terza parte, ec. Da ciò segue che *moltiplicando il denominatore si divide una frazione, e dividendo il denominatore si moltiplica la frazione.*

Dunque *se contemporaneamente si moltiplicano o si dividono per uno stesso numero i termini di una frazione, questa non cambia valore* ; perchè questa operazione si riduce a moltiplicare e a divider la frazione data per lo stesso numero. Per es. moltiplicando i termini di $\frac{3}{7}$ per 3 si ha $\frac{9}{21}$; la frazione non ha cambiato valore, perchè si è contemporaneamente moltiplicata e divisa per 3, e perciò sarà $\frac{9}{21}$ uguale a $\frac{3}{7}$.

D. Che s'intende per *numero pari* e *numero impari* ?

R. I numeri *pari* sono quelli che si possono dividere esattamente per 2, gl' *impari* sono quelli che non si possono dividere per 2.

I numeri pari si conoscono dall'ultima cifra, e sono quelli terminati dalle cifre 0, 2, 4, 6, 8. In effetti dividendo un numero qualunque per 2, il penultimo resto non può esser che zero o 1; calata l'ultima cifra che è una delle precedenti, l'ultimo dividendo parziale sarà uno de' numeri che seguono: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, che sono appunto i multipli di 2 contenuti nella seconda linea della tavola di Pitagora. Perciò la divisione per 2 riesce esattamente.

D. Che s'intende per *numero primo*?

R. Quello che non può esser diviso esattamente da nessun numero, all'infuori che da se stesso o dall'unità. I numeri primi si trovano solo ne' numeri impari, escluso 2, e sono: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ec

D. Come si riduce una frazione alla sua più semplice espressione?

R. Una frazione si riduce togliendo i fattori comuni al numeratore e al denominatore. Ciò può farsi dividendo i termini della frazione prima per 2 quante volte si può, poi per 3 quante volte si può, poi per 5, e così si prosegue per tutti

numeri primi. Per esempio, la frazione $\frac{588}{1092}$, dividendo

per 2, si riduce a $\frac{294}{546}$, dividendo nuovamente per 2 divie-

ne $\frac{147}{273}$; i suoi termini non essendo più divisibili per 2, si

sperimenta il 3; la divisione riesce, e la frazione si riduce a $\frac{49}{91}$; siccome il numeratore è divisibile per 7, si sperimen-

ta il 7, e si ha finalmente $\frac{7}{13}$. I divisori adoperati sono

2, 2, 3, 7, che moltiplicati fra loro producono 84; or la

frazione $\frac{588}{1092}$ si riduce subito a $\frac{7}{13}$ dividendo i suoi termini per

84. Il numero 84 che è il più grande di quelli che possono dividere 588 e 1092, si chiama il loro *massimo comun divisore*.

Una frazione è *ridotta alla sua più semplice espressione*, quando i suoi termini sono stati divisi pel loro più grande divisore comune. Due numeri che non hanno alcun divisore comune si chiamano *primi tra loro*.

Una frazione, di cui i termini sono numeri primi tra

loro, non si può ridurre ad espressione più semplice, e perciò si chiama *irriducibile*.

D. Come si fa più brevemente l'operazione precedente?

R. Cercando direttamente il massimo comun divisore fra i due termini della frazione; il che riducesi a far l'operazione precedente in ordine contrario, cioè in vece di cominciare dal più piccolo divisore possibile, che è 2, s'incomincia dal più grande possibile; e in vece di fare il tentativo per tutti i numeri, si sperimentano que' soli divisori che possono esser comuni.

Ragionando sull'esempio precedente si vede, che i due numeri 1092 e 588 non possono avere un divisore comune più grande di 588; perciò se 588 dividesse 1092, sarebbe 588 il massimo comun divisore. Fatta la divisione, si ha per resto 504. Ora è chiaro che se 1092 e 588 hanno qualche divisore comune, ciascuno di essi risulterà dal divisore comune ripetuto più volte. Quindi allorchè nel far la divisione da 1092 si sottrae 588 quante volte si può, egli è come se si fosse tolto un certo numero di volte il divisore comune; perciò quello che resta, cioè il resto della divisione conterrà pure un certo numero di volte il divisore comune. Da ciò si conchiude che se 1092 e 588 hanno un divisore comune, questo sarà comune anche al resto 504. Dovendo dunque i due numeri 588 e 504 aver lo stesso divisor comune, si passa a sperimentar 504, che è il più grande divisore possibile. Diviso 588 per 504, si ha per resto 84, e si dimostra similmente che il divisor comune di 1092, 588, 504 dev'esser comune anche a 84. Si sperimenta 84, cioè si divide 504 per 84 e la divisione riesce esatta; perciò 84 è il massimo comun divisore fra 1092 e 588. Si vede inoltre che il divisor comune che si cerca, dovendo essere comune a' numeri

1092, 588, 504, 84,

non può esser più grande di 84.

La regola si riduce alla seguente: *si divide il numero più grande per il più piccolo, poi il divisore passa per dividendo e il resto per divisore e così si continua, finchè si arriva a una divisione senza resto*. L'ultimo divisore sarà il massimo comun divisore.

Se l'ultimo divisore è l'unità, i numeri dati non hanno divisore comune, cioè sono primi tra loro.

Per far l'operazione con ordine, si dispone come nel-

l'esempio che segue, in cui si cerca il massimo comun divisore tra 377 e 156.

$$\begin{array}{r|rrrr} 377 & 156 & 63 & 26 & 13 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

I numeri scritti nella seconda linea sono i quozienti, e l'ultimo divisore 13 è il massimo comun divisore.

D. Come si sommano o si sottraggono le frazioni?

R. Per poter sommare o sottrarre le frazioni, bisogna che sieno rapportate alla stessa unità, cioè abbiano lo stesso denominatore. Così $\frac{3}{13}$ e $\frac{2}{13}$ si sommano come 3 e 2, e siccome nella somma l'unità non cambia, la somma cercata è $\frac{5}{13}$. Parimente da $\frac{7}{9}$ si toglie $\frac{2}{9}$ come 2 da 7, e si ha per resto $\frac{5}{9}$. Dunque le frazioni che hanno lo stesso denominatore si sommano o sottraggono sommando o sottraendo i numeratori, e dando al risultamento lo stesso denominatore. Se hanno denominatore diverso, bisogna prima ridurle allo stesso denominatore.

D. Come si riducono più frazioni allo stesso denominatore?

R. Più frazioni si riducono allo stesso denominatore, moltiplicando i termini di ciascuna per il prodotto dei denominatori di tutte le altre. Allora ciascuna frazione conserva lo stesso valore ed acquista un denominatore eguale al prodotto di tutti i denominatori, e perciò comune. Per es. date le frazioni

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{7},$$

bisogna moltiplicare i termini della prima per 28, i termini della seconda per 21, e quelli della terza per 12; si hanno così le tre frazioni

$$\frac{56}{84}, \frac{63}{84}, \frac{36}{84}$$

che sono rispettivamente eguali alle prime. La loro somma è, $\frac{133}{84}$ ovvero $1\frac{71}{84}$.

D. Date due frazioni, come si conosce quale di esse è più grande?

R. Si conosce riducendole allo stesso denominatore. Per es. le due frazioni $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{11}$ ridotte allo stesso denominatore divengono $\frac{55}{66}$, $\frac{54}{66}$; e così si vede che la prima è maggiore della seconda, e l'eccesso è $\frac{1}{66}$.

D. Come si sommano interi uniti a frazioni?

R. Si sommano prima le frazioni; da questa somma si ricavano gl'interi e si riportano alla colonna delle unità, siccome si vede praticato nell'annesso esempio. Le frazioni ridotte allo stesso denominatore divengono $\frac{80}{120}$, $\frac{72}{120}$, $\frac{13}{120}$, la cui somma è $\frac{167}{120}$, ovvero $1\frac{47}{120}$; si scrive $\frac{47}{120}$, si riporta 1 alla colonna dell'unità, e poi si prosegue come si fa ne' numeri interi.

$$\begin{array}{r} 375 \frac{2}{3} \\ 28 \frac{3}{5} \\ 113 \frac{1}{8} \\ \hline 517 \frac{47}{120} \end{array}$$

D. Come si sottraggono gl'interi uniti alle frazioni?

R. Si sottraggono prima le frazioni fra loro, e se la frazione superiore è minore dell'inferiore, si stacca un'unità dal numero superiore e si riunisce alla frazione. Nell'esempio qui annesso si vede che le frazioni $\frac{2}{3}$ e

$\frac{4}{5}$ ridotte allo stesso denominatore divengono $\frac{10}{15}$ e $\frac{12}{15}$; essendo la prima minore della seconda, si stac-

ca una unità da 374, la quale diviene $\frac{13}{15}$ e riunita a $133\frac{13}{15}$ forma $\frac{23}{15}$ da cui tolto $\frac{12}{15}$ si ha per resto $\frac{13}{15}$. Scritta questa frazione e ricordandosi che la cifra 4 del numero superiore è divenuta 3, si proseguirà l'operazione al solito.

D. Come si moltiplica una frazione, allorchè il moltiplicatore è numero intero?

R. Siccome un numero si moltiplica per un intero, per es. per 3, o ripeterlo 3 volte, o riferendolo ad una unità 3 volte più grande, una frazione si moltiplica per un intero o moltiplicando il numeratore per l'intero (il che corrisponde a ripeterlo), o dividendo il denominatore (il che vale a riferirlo ad un'unità più piccola). Così $\frac{5}{8}$ moltiplicato per 3 dà $\frac{15}{8}$, $\frac{5}{8}$ moltiplicato per 2 dà $\frac{5}{4}$.

D. Come si divide una frazione, allorchè il divisore è numero intero?

R. Per una ragione analoga alla precedente si può dividere una frazione per un intero o dividendo il numeratore o moltiplicando il denominatore per l'intero dato. Così $\frac{12}{13}$ diviso per 6 dà $\frac{2}{13}$, $\frac{5}{11}$ diviso per 3 dà $\frac{5}{33}$.

D. Come si moltiplica una frazione per un'altra?

R. Moltiplicandola per il numeratore e dividendola per il denominatore del moltiplicatore. In effetti si debba per es. moltiplicare $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{4}$; è chiaro che sopprimendo il denominatore 4 del moltiplicatore $\frac{3}{4}$, si viene a prendere un'unità 4 volte più grande; quindi dopo aver moltiplicato $\frac{5}{7}$ per 3, dal prodotto $\frac{15}{7}$ bisogna ritornare alla vera unità, cioè dividere per 4; il che dà $\frac{15}{28}$. Così pure per moltiplicare $\frac{12}{35}$ per $\frac{5}{6}$, bisogna moltiplicare per 5 e dividere per 6; moltiplicando per 5 si ha $\frac{12}{7}$, dividendo per 6 si ha $\frac{2}{7}$. Dal modo come si è operato in questi due esempi risulta che *si moltiplica una frazione per un'altra, o moltiplicando numeratore per numeratore e denominatore per denominatore, o pure invertendo il moltiplicatore e dividendo i termini del moltiplicando per quelli del moltiplicatore inverso.* (*)

(*) S' *inverte* una frazione scrivendo il denominatore per numeratore e il numeratore per denominatore. Così la frazione inversa di $\frac{3}{5}$ è $\frac{5}{3}$. Generalizzando questa definizione si vede che l'inverso di 3 è $\frac{1}{3}$.

Siccome un intero si può scrivere sotto forma di frazione dandovi per denominatore l'unità, si moltiplica un intero per una frazione, moltiplicando l'intero per il numeratore della frazione e dandovi lo stesso denominatore.

Perciò $5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$.

D. A che corrisponde la moltiplicazione allorchè il moltiplicatore è una frazione?

R. L'operazione corrisponde a prender del moltiplicando quella stessa parte che il moltiplicatore è dell'unità. Quindi se il moltiplicatore è minore di 1, il prodotto sarà minore del moltiplicando. Per es. moltiplicare 5 per $\frac{2}{3}$ significa prendere i $\frac{2}{3}$ di 5; moltiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{3}{5}$ significa prendere i $\frac{3}{4}$ di $\frac{3}{5}$. Il prodotto di più frazioni si chiama anche *frazione di frazione*.

D. Come si fa la divisione di una frazione per un'altra?

R. Si fa dividendo per il numeratore del divisore e moltiplicando per il denominatore. In effetti sia $\frac{2}{3}$ da dividersi per $\frac{3}{4}$; è chiaro che moltiplicando questi due numeri per 4, non si fa altro che cambiar l'unità del dividendo e del divisore, il che non altera il quoziente; per questa operazione i due numeri divengono $\frac{8}{3}$ e 3; e non si tratterà ora che di dividere $\frac{8}{3}$ per 3; il che dà $\frac{8}{9}$. Similmente per dividere $\frac{8}{9}$ per $\frac{2}{3}$ bisogna moltiplicare $\frac{8}{9}$ per 3, il che dà $\frac{8}{3}$; in seguito dividere per 2 e si ottiene $\frac{4}{3}$. D'altronde essendo la divisione un'operazione inversa della moltiplicazione, si esegue facendo operazioni contrarie a quelle che si fanno per la moltiplicazione. Quindi, dal modo come si è operato ne' due esempi precedenti si conchiude, che *per dividere una frazione per un'altra, bisogna* (quando si può) *dividere i termini del dividendo per i termini del divisore, o pure moltiplicare i termini del dividendo per quelli del divisore inverso.*

Quindi se il divisore è minore dell'unità, invertendolo ne risulterà una frazione maggiore di 1, e siccome per avere il quoziente bisogna moltiplicare il dividendo per questa nuova frazione, il prodotto sarà maggiore del dividendo; e perciò quando il divisore è minore di 1, il quoziente sarà maggiore del dividendo.

La divisione di un intero per una frazione diviene un caso particolare del precedente, allorchè si dà al dividendo il denominatore 1; perciò si divide un intero per una frazione moltiplicando l'intero per la frazione inversa del divisore.

D. Come si moltiplicano o si dividono gl'interi uniti alle frazioni?

R. Si riducono interi e frazioni a numeri frazionari, e si opera secondo la regola. Per es. si debba moltiplicare $37\frac{2}{3}$ per $5\frac{3}{4}$: questi due numeri divengono $\frac{113}{3}$ e $\frac{23}{4}$, il loro prodotto è $\frac{2599}{12}$; e ricavando gl'interi si ottiene in fine $216\frac{7}{12}$.

D. Vi è qualche altro mezzo più semplice per far la moltiplicazione?

R. Siccome nella moltiplicazione bisogna moltiplicare le diverse parti del moltiplicando per ciascuna parte del moltiplicatore, si moltiplicheranno gl'interi fra loro, poi l'intero di un fattore per la frazione dell'altro, e poi le frazioni fra loro. Nell'esempio posto qui appresso, le prime due linee sono il prodotto di 372 per 51, la terza è il prodotto di 51 per $\frac{3}{4}$, la quarta è il prodotto di 372 per $\frac{3}{5}$, e la quinta è il prodotto di $\frac{3}{4}$ per $\frac{3}{5}$. La somma di tutti questi prodotti parziali dà il prodotto totale.

$$\begin{array}{r}
 372 \\
 51 \\
 \hline
 1860 \\
 38\frac{1}{4} \\
 223\frac{1}{5} \\
 9 \\
 20 \\
 \hline
 19233\frac{9}{10}
 \end{array}$$

D. Una frazione ordinaria come si converte in frazione decimale?

R. Essendo la frazione una divisione indicata, basta considerare il numeratore come seguito dalla virgola e da una serie di zeri e far la divisione. Per esempio la frazione $\frac{5}{7}$ indica la divisione di 5,0000... per 7; quindi fatta la divisione si ha $\frac{5}{7} = 0,714285...$

D. Quante cifre si ottengono nel quoziente?

R. Siccome il resto dev'esser minore del divisore, tutt'i resti diversi che si possono avere sono i numeri inferiori al divisore. Quindi prima che nel quoziente si sieno ottenute tante cifre quante unità contiene il divisore, o si è avuto un resto *zero*, o è ricomparso uno dei resti precedenti. Nel primo caso la divisione è terminata, e la frazione data si converte esattamente in decimali. Così $\frac{5}{8}$ si cambia in 0,625. Quando ricomparisce uno de' resti precedenti, i dividendi parziali ritornano con lo stess'ordine e quindi ritornano sempre le medesime cifre nel quoziente. Allora il quoziente si compone di un certo numero di cifre che si ripetono all'infinito, e la frazione decimale si chiama *periodica*. Per es. $\frac{7}{13}$ dà 0,076923 076923. . . . Perciò, allorchè una frazione ordinaria si vuol convertire in decimale, si deve ottenere o una frazione decimale esatta, o una frazione decimale periodica.

ART. IV.

DELLA RIPRUIOVA DELLE OPERAZIONI.

D. Che cosa è la ripruova di una operazione?

R. La ripruova di una operazione è una seconda operazione che si fa per verificare se la prima è esatta.

D. Come si fa la ripruova dell'addizione?

R. Si tolgono successivamente dalla somma tutte le somme parziali di cui si compone, cominciando dalla sinistra e andando verso la destra; se non si ha resto, l'operazione è ben fatta. Così nell'es. qui posto la somma delle

5743 migliaia è 19 ; tolta da 21 dà per resto 2 , che u-
 2782 nito alla cifra 9 che segue fa 29 centinaja. La som-
 5843 ma delle centinaja è 27 , e tolta da 29 dà per re-
 7543 sto 2 , che unito alla cifra seguente fa 21 diecine.
 Sommate le diecine si ha 20 , che tolto da 21 dà
 21911 per resto 1 ; e questo unito all' ultima cifra forma
 2210 11. La somma delle unità è 11 che tolto da 11 dà
 per resto 0. Per conseguenza l' operazione è ben fatta.

D. Come si fa la riprova della sottrazione ?

R. Siccome il numero inferiore unito al resto dee ri-
 produrre il numero superiore , basta esaminare se la somma
 de' detti due numeri forma il numero superiore.

D. Come si fa la riprova della moltiplicazione e della
 divisione ?

R. Queste due operazioni , essendo una l' inversa del-
 l' altra , si servono scambievolmente di riprova. Perciò per
 verificare l' esattezza della moltiplicazione , basta dividere il
 prodotto per uno de' fattori ; e per verificare la divisione si
 deve moltiplicare il divisore per il quoziente , a questo pro-
 dotto aggiungere il resto , e la somma che si ottiene deve
 essere eguale al dividendo.

A R T. V.

DE' RAPPORTI E DELLE PROPORZIONI.

D. Che cosa è il *rapporto* o la *ragione* di due quantità ?

R. È il quoziente di una quantità divisa per l' altra ;
 ed è precisamente il risultamento che si ottiene , allorchè
 due grandezze della medesima specie si paragonano con lo
 scopo di vedere in che modo una può esser formata per
 mezzo dell' altra , ovvero quante volte l' una contiene l' al-
 tra. Il rapporto di 15 a 3 è 5 ; questo 5 fa conoscere che
 15 si può formare per mezzo del 3 ripetendo il 3 cinque
 volte. Il rapporto di due numeri s' indica con due punti
 messi fra i due numeri , come 15 : 3 ; ma si può ancora
 indicare per mezzo di una frazione ; e perciò $\frac{15}{3}$ indica an-
 che il rapporto di 15 a 3. Se la quantità cui l' altra si pa-
 ragona è l' unità , il rapporto è precisamente ciò che si è
 chiamato *numero*.

Il primo termine di un rapporto si chiama *antecedente* ;
 il secondo , *conseguente*.

D. Che cosa è la proporzione?

R. La *proporzione* è l'eguaglianza di due rapporti. Così il rapporto di 12 a 4 essendo eguale a quello di 15 a 5, i quattro numeri 12, 4, 15, 5 formano una proporzione; la quale si scrive così:

$$12 : 4 :: 15 : 5.$$

e. si legge: 12 a 4 come 15 a 5.

D. Quali proprietà risultano dalla natura del rapporto?

R. Le principali sono le seguenti.

1.° Se due rapporti sono eguali a un terzo saranno eguali fra loro. Perciò se si hanno le due proporzioni

$$12 : 4 :: 15 : 5, \quad 12 : 4 :: 21 : 7$$

sarà anche

$$12 : 4 :: 21 : 7.$$

2.° Il rapporto, essendo un quoziente, resta lo stesso se i suoi termini si moltiplicano o dividono per un medesimo numero. Per es. il rapporto di 3 : 7 è uguale a quello di 6 : 14.

D. In quante maniere si possono disporre i termini di una proporzione?

R. In otto maniere diverse. In effetti nella proporzione $12 : 4 :: 15 : 5$ basta che i termini 12 e 5 si trovino sempre negli estremi o sempre ne' medi, affinchè la proporzione sussista. Or quattro cambiamenti si ottengono lasciando 12 e 5 negli estremi e 4 e 15 ne' medi; e altri quattro si ottengono facendo passare 4 e 15 ne' posti estremi e gli altri due in mezzo.

Il cambiamento di posto de' termini medi o degli estremi s'indica colla parola *permutando*, e il cambiamento dell'antecedente in conseguente e del conseguente in antecedente s'indica colla parola *invertendo*.

D. Quale conseguenza importante si ricava da questa proprietà?

R. Risulta da questa proprietà che in una proporzione si possono moltiplicare o dividere per un medesimo numero i due antecedenti o i due conseguenti. In effetti dalla proporzione $12 : 4 :: 15 : 5$, permutando i termini medi, si ha $12 : 15 :: 4 : 5$. Or se il primo rapporto si

moltiplica per es. per 2 e si divide per 10, non cambia, e si ha la proporzione $2,4 : 3 :: 4 : 5$, e permutando di nuovo si ottiene $2,4 : 4 :: 3 : 5$.

D. A quale scopo debbono esser dirette le operazioni precedenti?

R. A dare alla proporzione una forma più semplice, o più appropriata alla quistione che si sta trattando.

I casi più comuni sono i seguenti.

1.° Una proporzione che contiene termini frazionari, si può convertire in un'altra che ha tutti i termini interi. Per es. la proporzione $2 : \frac{5}{3} :: \frac{18}{5} : 3$ si converte nell'altra $6 : 5 :: 18 : 15$ moltiplicando i due primi termini per 3, i due secondi per 5.

2.° Una proporzione si può ridurre ad avere per uno dei termini l'unità. Per es. la proporzione $5 : 7 :: 15 : 21$ si riduce a $1 : \frac{7}{5} :: 15 : 21$, dividendo il primo rapporto per 5.

D. Qual è l'operazione indicata colla parola *componendo*?

R. Il *componendo* ha luogo quando si fa la somma dell'antecedente e del conseguente e si paragona al conseguente. In effetti allorchè all'antecedente si aggiunge il conseguente, questo sarà contenuto nell'antecedente una volta di più; cioè si sarà accresciuto il rapporto di un'unità. Perciò facendo la stessa operazione ne' due rapporti, ne risulteranno due rapporti eguali e i termini saranno in proporzione. Così dalla proporzione

$$12 : 4 :: 15 : 5$$

componendo si ottiene

$$12 + 4 : 4 :: 15 + 5 : 5.$$

Da queste due proporzioni permutando risulta

$$12 : 15 :: 4 : 5, \quad 12 + 4 : 15 + 5 :: 4 : 5;$$

dalle quali si ha

$$12 + 4 : 15 + 5 :: 12 : 15,$$

e permutando nuovamente sarà

$$12 + 4 : 12 :: 15 + 5 : 15.$$

Perciò il componendo ha luogo ancora quando la somma de' due primi termini si paragona all' antecedente.

Siccome le due proporzioni

$$12 + 4 : 15 + 5 :: 4 : 5 :: 12 : 15$$

possono risultare dalla proporzione

$$12 : 15 :: 4 : 5 ,$$

si vede che in una proporzione *la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti, come un antecedente a un conseguente.*

D. In che consiste l'operazione distinta colla parola *dividendo*?

R. Il dividendo ha luogo quando la differenza fra l'antecedente e il conseguente si paragona all' antecedente o al conseguente. Sia per es. la proporzione

$$12 : 4 :: 15 : 5 ;$$

se si forma il rapporto $12 - 4 : 4$, è evidente che il conseguente sarà contenuto nell'antecedente una volta di meno di quel che era nel rapporto $12 : 4$; e perciò così facendo ne' due rapporti della proporzione, ciascuno si viene a diminuire di un' unità, e i termini che ne risultano saranno anche in proporzione; cioè si avrà

$$12 - 4 : 4 :: 15 - 5 : 5.$$

E siccome invertendo si ha

$$12 - 4 : 15 - 5 :: 4 : 5 ,$$

sarà anche

$$12 - 4 : 15 - 5 :: 12 : 15 ,$$

e invertendo nuovamente si ottiene

$$12 - 4 : 12 :: 15 - 5 : 15.$$

Le due proporzioni precedenti potendo anche ricavarli dalla proporzione

$$12 : 15 :: 4 : 5 ,$$

allora 12 e 4 saranno gli antecedenti e 15 e 5 i conseguenti. Da ciò si conchiude che in una proporzione *la differenza degli antecedenti sta alla differenza de' conseguenti come un antecedente a un conseguente.*

D. Che cosa si ottiene con le due operazioni, componendo e dividendo, eseguite contemporaneamente?

R. Essendo

$$12 + 4 : 15 + 5 :: 4 : 5, \quad 12 - 4 : 15 - 5 :: 4 : 5,$$

sarà

$$12 + 4 : 15 + 5 :: 12 - 4 : 15 - 5,$$

e permutando

$$12 + 4 : 12 - 4 :: 15 + 5 : 15 - 5.$$

E siccome 12 e 4 sono i termini del primo rapporto quando si parte dalla proporzione $12 : 4 :: 15 : 5$, e sono i due antecedenti, quando si parte dalla proporzione $12 : 15 :: 4 : 5$; perciò in una proporzione *la somma de' due primi termini sta alla loro differenza, come la somma de' due ultimi termini sta alla loro differenza*; o pure *la somma de' due antecedenti sta alla loro differenza, come la somma dei conseguenti sta alla loro differenza.*

D. Che s'intende per ragione composta di molte ragioni?

R. La ragione composta di molte ragioni è quella che risulta dal prodotto di tutti gli antecedenti fra loro e di tutti i conseguenti fra loro; cioè quella che ha per antecedente il prodotto di tutti gli antecedenti e per conseguente il prodotto di tutti i conseguenti. Per es. la ragion composta dalle ragioni di

$$3 : 5, \quad 7 : 11, \quad 5 : 12$$

è

$$3 \times 7 \times 5 : 5 \times 11 \times 12, \quad \text{ovvero } 7 : 44.$$

Da ciò segue, che se nelle ragioni date il conseguente di ciascun rapporto forma l'antecedente del rapporto che segue,

la ragion composta sarà eguale a quella del primo termine all'ultimo. Per es. se sono date le ragioni

$$3 : 7, \quad 7 : 11, \quad 11 : 13$$

la ragion composta sarà eguale

$$3 \times 7 \times 11 : 7 \times 11 \times 13$$

che col sopprimere il fattore comune 7×11 riducesi a quella di $3 : 13$.

D. Dati tre termini di una proporzione come si trova il quarto?

R. Siccome il prodotto de' termini estremi è eguale al prodotto de' medi, se manca il quarto termine, basta moltiplicare i termini medi e dividere il prodotto per l'estremo.

D. In che consiste la regola del tre semplice?

R. Consiste nel trovare il quarto termine di una proporzione di cui ne son dati tre. Essa serve per risolvere quei problemi ne' quali la cosa che si cerca cresce o diminuisce nello stesso rapporto di un'altra. Quando le due cose crescono nello stesso rapporto, la ragione è *diretta*; se una cresce mentre l'altra diminuisce, la ragione si chiama *inversa*.

I. *Problema.* 15 uomini hanno fatto in un certo tempo 8 canne di lavoro, 19 uomini quanto lavoro faranno nello stesso tempo?

Siccome 30 uomini farebbero 16 canne di lavoro, 45 uomini ne farebbero 24, ec., si vede che il lavoro cresce in proporzione degli uomini, perciò il rapporto è diretto. Chiamando x il numero delle canne che si cerca, il rapporto degli uomini dev'essere uguale a quello delle canne; e perciò si avrà la proporzione

$$15 : 19 :: 8 : x,$$

e quindi $x = \frac{19 \times 8}{15} = \frac{152}{15}$.

II. *Problema.* 15 uomini hanno fatto un dato lavoro in 8 giorni, 19 uomini in quanti giorni faranno lo stesso lavoro?

Siccome 30 uomini metterebbero 4 giorni, 60 uomini 2 giorni, ec., si vede che i giorni diminuiscono nello stesso rapporto in cui crescono gli uomini, e perciò il rapporto degli uomini è *inverso* di quello de' giorni; quindi chiaman-

do x il numero de' giorni, e stabilendo il rapporto de' giorni $8 : x$, quello degli uomini sarà $19 : 15$, e si avrà :

$$19 : 15 :: 8 : x,$$

$$\text{da cui } x = \frac{15 \times 8}{19} = \frac{120}{19}.$$

D. Che cosa è la regola del tre composta ?

R. È l'operazione che serve a trovare una cosa che dipende da molti rapporti, cioè che cresce o diminuisce secondo i rapporti di molte altre cose. I problemi relativi a questa regola si risolvono formando tante proporzioni successive quante sono le cose da cui dipende quella che si cerca.

Problema. 18 uomini hanno fatto in 24 giorni un muro di 300 palmi di lunghezza, 10 di altezza e 2 di grossezza ; 30 uomini per fare un muro di 400 palmi di lunghezza, 12 di altezza e 3 di grossezza quanto tempo metteranno ?

Si dispongono i dati nel seguente modo :

uom.	lungh.	alt.	gros.	giorni
18	300	10	2	24
30	400	12	3	x

Si ragionerà così. Il rapporto degli uomini è inverso di quello de' giorni ; perciò la prima proporzione sarà

$$30 : 18 :: 24 : x' (*) ,$$

da cui si ricava $x' = 24 \times \frac{18}{30}$; per conseguenza se il lavoro fosse lo stesso, 30 uomini metterebbero un tempo espresso da $\frac{24 \times 18}{30}$. Or se per 300 palmi di lunghezza ci vuol questo tempo, per 400 palmi ci vorrà un tempo maggiore : quindi il rapporto delle lunghezze è diretto con quello del tempo, e si avrà la seconda proporzione

$$300 : 400 :: 24 \times \frac{18}{30} : x'' ,$$

$$\text{da cui } x'' = 24 \times \frac{18}{30} \times \frac{400}{300}.$$

(*) x' , x'' , x''' , ec. si legge : x primo, x secondo, x terzo, ec.

Similmente ragionando per le altezze, si avrà l'altra proporzione

$$10 : 12 :: 24 \times \frac{18}{30} \times \frac{400}{300} : x''',$$

da cui si ottiene

$$x''' = 24 \times \frac{18}{30} \times \frac{400}{300} \times \frac{12}{10}.$$

In fine tenendo conto delle grossezze, si ha la quarta proporzione

$$2 : 3 :: 24 \times \frac{18}{30} \times \frac{400}{300} \times \frac{12}{10} : x,$$

e quindi
$$x = 24 \times \frac{18}{30} \times \frac{400}{300} \times \frac{12}{10} \times \frac{3}{2}.$$

Siccome queste frazioni, dal cui prodotto risulta la quantità x , sono appunto i rapporti diretti o inversi delle cose da cui dipende la detta quantità, per resolver siffatti problemi si adotterà la seguente regola.

Si scrivono i dati del problema in due linee in modo che i termini de' diversi rapporti corrispondano l'uno sotto l'altro; poi si formeranno questi rapporti esaminando bene se debbono essere diretti o inversi; le frazioni che ne risultano si moltiplicheranno fra loro e per il termine solitario, e il prodotto sarà la quantità che si cerca.

Si avverta prima di fare il prodotto di sopprimere i fattori comuni al numeratore e denominatore. Così $\frac{400}{300}$ si riduce a $\frac{4}{3}$, $\frac{18}{30}$ a $\frac{3}{5}$, $\frac{12}{10}$ a $\frac{6}{5}$, e perciò sarà

$$x = \frac{24 \times 3 \times 4 \times 6 \times 3}{5 \times 3 \times 5 \times 2}.$$

Cancellando nuovamente i fattori 3 e 2 comuni al numeratore e al denominatore, si ha $x = \frac{24 \times 36}{25}$. Questa frazione si può moltiplicare sotto e sopra per 4 e allora diviene

$$x = 24 \times \frac{144}{100} = 24 \times 1,44 = 34,56.$$

D. Che s'intende per interesse?

R. L'interesse è ciò che si paga per una somma data in prestito, la quale chiamasi *capitale* o *sorte principale*. L'interesse si calcola ad anno e sopra una somma eguale a 100. Quindi, dire il 6 per 100 significa che per ogni 100 di capitale si pagano 6 ducati ogni anno.

D. A che riduconsi i problemi d'interesse semplice?

R. A trovare l'interesse corrispondente ad una data somma, o pure il capitale corrispondente ad un dato interesse.

I. *Problema*. Si cerca l'interesse corrispondente ad una somma di duc. 734 al 6 per 100. Si farà la proporzione

$$100 : 6 :: 734 : x,$$

$$\text{da cui } x = \frac{6 \times 734}{100} = 44,04.$$

Da ciò si ricava che per aver l'interesse di una data somma, *bisogna moltiplicare la somma data per l'interesse e dividere il prodotto per 100, cioè staccarne due cifre decimali*.

II. *Problema*. Un capitale al 6 per 100 dà d'interesse duc. 47,70; si cerca il capitale. Si farà la proporzione

$$6 : 100 :: 47,70 : x,$$

$$\text{e quindi } x = \frac{4770}{6} = 795;$$

cioè per trovare il capitale corrispondente ad una data rendita bisogna divider la rendita per l'interesse e moltiplicare il prodotto per 100.

D. Come si trova il valore che una somma acquista dopo un dato tempo.

R. Si trova, aggiungendo al capitale l'interesse corrispondente. Per esempio si cerchi quanto diviene la somma 372 dopo un anno, coll'interesse al 6 per 100. Si farà la proporzione

$$100 : 6 :: 372 : x \text{ ovvero } 1 : 0,06 :: 372 : x$$

da cui $x = 0,06 \times 372 = 22,32$. Per conseguenza la somma data dopo un anno diverrà $372 + 22,32$ cioè 394,32.

Si poteva anche far più brevemente, scrivendo

$$1 : 1,06 :: 372 : x$$

da cui $x = 1,06 \times 372 = 394,32$.

Se il tempo che deve scorrere è minore di un anno basterà trovar la parte d'interesse corrispondente al tempo dato, e nel resto si procederà come sopra. Così se si vuol sapere quanto varrà la somma 7438 dopo 7 mesi al 6 per 100, si troverà prima l'interesse corrispondente ai 7 mesi, prendendo i $\frac{7}{12}$ di 6, il che dà 3,5; e poi il valor richiesto sarà $x = 7438 \times 1,035 = 7698,33$.

Da ciò si ricava che per avere il valore di una somma dopo un dato tempo, basta moltiplicarla per l'unità più l'interesse dell'unità corrispondente al tempo dato.

D. Come si trova il valore attuale di una somma che deve riscuotersi dopo un dato tempo?

R. Siccome questa operazione è l'inversa della precedente, basta dividere la somma data per l'unità accresciuta del suo interesse, corrispondente al tempo dato. Per es. se vuol sapersi quanto vale attualmente la somma di duc. 1378 da ritirarsi dopo 9 mesi coll'interesse al 6 per 100, siccome l'interesse di 1 per 9 mesi è 0,045, si avrà

$$x = \frac{1378}{1,045} = \frac{1378000}{1045} = 1318,66.$$

D. Che cosa è la regola di sconto?

R. Per intender la regola di sconto, bisogna sapere che in commercio si sono introdotte alcune carte chiamate *cambiali*, nelle quali un negoziante si obbliga di pagare una data somma ad una data epoca. Or queste cambiali si negoziano come una merce, e il loro valore si calcola riportando all'epoca attuale il valore della somma scritta, cioè trovando il valore *reale* della somma scritta. Ciò che si paga di meno sul valore scritto si chiama *sconto*.

Per es., una cambiale di duc. 378, da esigersi dopo quattro mesi, si vuol cambiare; si cerca la somma che deve pagarsi attualmente calcolando l'interesse al 6 per 100. Siccome l'interesse per 4 mesi è $\frac{4}{12}$ di 6, ovvero 2, si dovrà dividere 378 per 1,02, e quindi chiamando x la somma cercata, sarà $x = \frac{378}{1,02} = 370,58$. La somma 7,42 che si è pagata di meno, è lo *sconto*.

D. Che s'intende per valore *nominale* e valore *reale* di una somma?

R. Il valor nominale è quello delle cifre scritte, il valore reale è quello riscritto all'epoca attuale. Così la somma 1378 da esigersi dopo 9 mesi ha per valore nominale 1378, e per valore reale 1318, 66. Il valore reale è lo stesso del nominale quando della somma si può disporre attualmente.

D. In che consiste la regola di società?

R. La regola di società ha per oggetto di dividere un numero in proporzione di altri numeri dati.

Problema. Cinque persone hanno fatto un negozio; il primo ha messo duc. 1200, il secondo 1700, il terzo 2400, il quarto 5300, il quinto 2600, che in tutto formano un capitale di 13200; hanno guadagnato 1815; si vuol sapere quanto spetta a ciascuno di guadagno.

È chiaro che se uno avesse messo la metà del capitale avrebbe dritto alla metà del guadagno, se la terza parte del capitale, dovrebbe avere il terzo del guadagno, cc.; dunque il rapporto tra il capitale totale e il guadagno totale dev'esser uguale al rapporto tra il capitale di ciascuno e il corrispondente guadagno; e perciò si avranno le proporzioni

$$\begin{aligned} 13200 : 1815 &:: 1200 : x, \\ 13200 : 1815 &:: 1700 : x', \\ &\text{ec.} \end{aligned}$$

Si osservi che tanto è moltiplicare 1200 per 1815 e poi dividere per 13200, quanto è moltiplicare 1200 per la frazione $\frac{1815}{13200}$. Questa frazione ridotta alla sua più semplice

espressione diviene $\frac{11}{80}$, e in decimali 0,1375. Perciò si ottiene il guadagno di ciascuno moltiplicando il suo capitale per $\frac{11}{80}$ o pure per 0,1375; il che fa conoscere che ciascuno

ha di guadagno li $\frac{11}{80}$ del suo capitale. Fatta questa operazione si ha per il primo 165, per il secondo 233,75, per il terzo 330, per il quarto 728,75, per il quinto 357,50.

Quindi risulta che per avere la porzione di guadagno di ciascuno, bisogna moltiplicare i rispettivi capitali per il quoziente che risulta dividendo il guadagno totale per il capitale totale.

D. In che consiste la regola d'alligazione?

R. In trovare il valor medio di un composto di cose dello stesso genere e di diverso valore.

Problema. Si hanno 4 barili di vino a duc. 1,90 il barile, 7 a 2,30 il barile, e 8 a 3,20 il barile; mescolati questi vini, si cerca il prezzo del miscuglio.

Si farà nel modo seguente:

4 barili a duc.	1,90	il barile costano	7,60
7	2,30		16,10
8	3,20		25,60
quindi 19 barili costano			49,30

Dividendo 49,30 per 19 si ha il prezzo di un barile di miscuglio. Fatta la divisione si ottiene duc. 2,59 $\frac{9}{19}$.

ART. VI.

DELLE MISURE.

D. Come si misurano le quantità?

R. Le quantità si misurano per mezzo di un'altra grandezza della medesima specie presa per unità, avendo per oggetto di vedere quante unità o parti di unità sono necessarie per formar la quantità da misurarsi. Ciò riducesi ad esprimere la quantità data per mezzo della sua unità, e il numero che la esprime è appunto la *misura*. Per es. si debba misurare la lunghezza di una stanza. Presa un'altra lunghezza conosciuta, per es. il palmo, si paragonerà la lunghezza data col palmo, ossia si vedrà quante volte il palmo è contenuto nella lunghezza della stanza, e il risultamento che se ne ottiene è la misura della lunghezza della stanza.

Ciascuna grandezza capace di essere misurata ha la sua unità stabilita. In ogni regno è fissata la grandezza dell'unità e il modo di suddividerla; ed essendo importante per il commercio che le misure non sieno alterate, le misure di cui si fa uso nella vendita degli oggetti debbono essere guarentite dal Governo, e perciò marchiate.

D. Negli oggetti quali sono le qualità soggette a misura?

R. Sono l'estensione e il peso. L'estensione comprende tre specie di misure, cioè di lunghezza, di superficie e di volume. Oltre queste grandezze si misura anche il tempo; ma l'unità di tempo, quantunque sia stabilita, non è soggetta a frode, e perciò non è sotto l'influenza dell'Autorità.

Arit.

tà. Il tempo generalmente si misura dividendo il giorno, ossia l'intervallo tra un mezzogiorno e l'altro, in 24 ore, l'ora in 60 minuti primi, il minuto primo in 60 secondi. Il numero: 5 giorni, 22 ore, 37 minuti primi e 17 secondi si scrive 5^g. 22^{or}. 37' 17".

D. Che ufficio fa la moneta?

R. La moneta somministra con facilità il rapporto tra il valore relativo di diversi oggetti ad una data epoca. Così se una canna di panno costa 10 ducati e una botte di vino costa pure 10 ducati, si dirà che la canna di panno e la botte di vino hanno lo stesso valore; e se 10 rotoli di zucchero costano 4 ducati, e 10 rotoli di caffè costano 6 ducati, il valor dello zucchero sarà a quello del caffè come 4:6. La moneta ha la sua unità, i suoi moltiplici e le sue suddivisioni; e potendosi dividere in frazioni assai piccole, si rende facile il cambio e la permuta degli oggetti, che senza questo mezzo riuscirebbe fastidiosissima.

D. Qual'è il nuovo sistema metrico francese?

R. Si è preso per unità di lunghezza la diecimillesima parte della distanza dal polo all'equatore sul meridiano che passa per Parigi, e questa lunghezza si è chiamato *metro*.

L'unità di superficie è un quadrato che ha per lato un metro, e si chiama *ara*.

L'unità di volume per le legna da bruciare è un cubo (*) che ha per lato un metro, e si è chiamato *stero*.

L'unità di volume per contenere i liquidi è un cubo che ha per lato la decima parte di un metro, e si è chiamato *litro*.

L'unità di peso è il peso dell'acqua pura contenuta in un cubo che ha per lato la centesima parte di un metro, e si è chiamato *grammo*.

L'unità monetaria è il *franco*, che è una moneta di argento di 5 grammi, e che contiene $\frac{9}{10}$ di argento puro e $\frac{1}{10}$ di lega (**)

Nelle divisioni e ne' moltiplici dell'unità si è seguito il sistema di numerazione facendo precedere ogni unità dalle parole *deca*, *ecto*, *chilo*, *miria* pe' moltiplici, e per le divi-

(*) Il cubo ha la forma di un dado da giuocare di cui tutti i lati sieno eguali fra loro.

(**) La quantità di argento o di oro contenuto in una moneta sopra ogni unità di peso si chiama *titolo*.

sioni servendosi delle parole *deci*, *centi*, *milli*, ec. Quindi

il <i>miriametro</i>	equivale a 10000 metri
<i>chilometro</i>	1000
<i>ettometro</i>	100
<i>decametro</i>	10
<i>metro</i>	1
<i>decimetro</i>	0,1
<i>centimetro</i>	0,01
<i>millimetro</i>	0,001
ec.	

Gli stessi nomi si adattano alle altre misure.

Queste misure, seguendo nelle loro divisioni il sistema di numerazione, permettono di cambiar facilmente l'unità secondo i bisogni sociali. Perciò per le misure delle distanze da un paese a un altro, cioè per le misure itinerarie, si prende per unità il miriametro; pe' pesi in grande si prende per unità il chilogrammo che è un peso di 1000 grammi. I composti dello *stero* non sono in uso, perchè non necessari.

D. Quali erano le antiche misure usate in Parigi?

R. L'unità lineare era il piede che si divideva in 12 pollici, il pollice in 12 linee, la linea in 12 punti: 6 piedi formavano una tesa.

L'unità di peso era la libbra che si divideva in 16 once, l'oncia in 8 grossi, il grosso in 3 scrupoli, e lo scrupolo in 24 grani.

L'unità di moneta era la lira che si divideva in 20 soldi, il soldo in 12 denari.

1 piede equivale a metri 0,324839,

1 libbra a chilogr. 0,48951.

D. Quali erano le misure della città di Napoli prima del decreto de' 6 aprile 1840.

R. L'unità lineare era il *palmo* che si divideva in 12 onces, e l'oncia in 5 minuti. 8 palmi formavano una *canna*.

L'unità di lunghezza per le misure itinerarie era il miglio, che si faceva corrispondere ad una lunghezza di 7024 palmi.

L'unità di superficie era il palmo quadrato o la canna quadrata. Per le misure de' campi o *agrarie* l'unità era il moggio, che era un quadrato di 30 passi di lato, essendo ogni passo di pal. $7\frac{1}{3}$. Il moggio si divideva in 10 *quarte*,

la quarta in 9 *nona*, la nona in 5 *quinte*.

Per le misure di capacità, cioè per quelle destinate a

contener le materie da misurarsi, vi erano diverse unità. Per le materie secche, come grano, legumi, ec. l'unità era il tomolo che si divideva in 24 *misure*, ogni misura in 24 *quartarole*.

Pel vino l'unità era il *barile* che si divideva in 60 caraffe, e per la vendita a minuto in 66 caraffe. Dodici barili formavano una *botte*, e due botti un *carro*.

Per l'olio l'unità era lo stajo che si divideva in 16 *quarti*, e il quarto in 6 *misurelli*; 16 staja formano la *salma*. Per la vendita in grande l'olio si valutava a peso e uno stajo si contava per rot. $10\frac{1}{3}$.

L'unità di peso per alcuni generi era la *libbra* che si divideva in 12 once, l'oncia in 10 *dramme*, la dramma in 3 *scrupoli* o *trappesi*, il trappeso in 20 *acini* o *grani*. Per altri generi l'unità era il *rotolo* che corrispondeva a once $33\frac{1}{3}$ cioè a 1000 *trappesi*; 100 rotoli formano un *cantajo*.

1 palmo si faceva corrispondere a metri	0,26367
1 rotolo corrisponde	a chilog. 0,890997

L'unità di moneta era ed è il *ducato*, che si divide in 100 *grani*. 1 ducato equivale a franchi 4,25.

D. Qual è il sistema di misure del regno di Napoli, stabilito con la legge de' 6 aprile 1840?

R. La base del sistema di misure è il *palmo*, il quale si divide in parti decimali; 10 palmi costituiscono una *canna*; e 7000 palmi, un *miglio*.

Attualmente si ha

$$1^{\text{ra}} = 0^{\text{m}},26455;$$

per conseguenza differisce dall'antico per una quantità insensibile.

La canna lineare, la canna quadrata e la canna cuba sono le unità di misura di lunghezza, di superficie e di solidità per tutti gli usi. La prima è uguale a 10 palmi lineari, la seconda a 100 palmi quadrati, e la terza a 1000 palmi cubi.

L'unità superficiale per le misure agrarie è il *moggio* di 10000 palmi quadrati, ossia è un quadrato che ha per lato 100 palmi ovvero 10 canne. Esso si divide in parti decimali.

Il *tomolo* è l'unità delle misure di capacità per gli aridi; esso equivale a tre palmi cubi e si divide in 2 *mez-*

zette o in 4 *quarte* o in 24 *misure*, ciascuna delle quali eguaglia il cubo che ha per lato mezzo palmo. La misura per gli aridi si prende a *raso* e non a *colmo*.

Il *barile* è l'unità di misura di capacità per alcuni liquidi, come il vino, l'aceto, ec., e si divide in 60 *caraffe*. Esso equivale ad un cilindro retto del diametro di un palmo e di 3 palmi di altezza (*); 12 barili formano una *botte*.

L'olio si misura sempre a peso.

L'unità di peso è il *rotolo*, eguale all'antico rotolo. Si divide in parti decimali, e la sua millesima parte è il *trappeso*. Il cantaro si compone di 100 *rotoli*.

L'antica libbra è abolita.

A R T. VII.

DE' NUMERI COMPLESSI.

D. Che cosa sono i numeri complessi?

R. I numeri complessi sono i numeri concreti, nei quali le suddivisioni dell'unità non seguono il sistema di numerazione; e perciò contengono diversi ordini di unità

3^{tes.} la cui dipendenza è solo di convenzione. Così
6 3^{tes.} 5^{pied.} 7^{pol.} 2^{linee} è un numero complesso.

18

5

23^{pi.}

12

46

23

276

4

280^{pol.}

12

560

28

2

3362^{lin.}

D. Come si riduce un numero complesso ad unità dell'infima specie, ossia ad unità del più piccolo ordine?

R. Le unità dell'ordine più alto si riducono a quelle dell'ordine che segue immediatamente, e poi da queste si passa successivamente alle altre. Per es. sia dato il numero 3^{tes.} 5^{pied.} 4^{pol.} 2^{linee} che si debba ridurre a linee. Si dirà: essendo 1 tesa eguale a 6 piedi, per avere i piedi contenuti nelle 3 tese si moltiplicherà 3 per 6; il che dà 18 piedi, che coi 5 piedi dati formano 23 piedi. Questo numero di piedi si converte in pollici moltiplicandolo per 12; e poi si prosegue, siccome qui si vede. Perciò sarà 3^{tes.} 5^{pied.} 4^{pol.} 2^{linee} = 3362^{lin.}

(*) Il cilindro ha la forma di una colonna, o di un tubo rotondo.

D. Come si esprime sotto forma di frazione un numero complesso?

R. Si riduce il numero dato ad unità dell'infima specie: poi si vede questa unità che parte è dell'unità principale; il primo de' numeri trovati sarà il numeratore e il secondo il denominatore della frazione richiesta. Nell'esempio precedente sapendo che

$$1 \text{ tesa} = 6 \text{ piedi} = 72 \text{ poll.} = 864 \text{ linee,}$$

sarà

$$3^{\text{tes.}} 5^{\text{pi.}} 4^{\text{pol.}} 2^{\text{lin.}} = \text{tese } \frac{3362}{864} = \text{tese } 3 \frac{770}{864} = \text{tese } 3 \frac{385}{432} = \text{tese } 3,8912. \text{ Quest'ultimo risultamento si ottiene convertendo la frazione } \frac{385}{432} \text{ in decimali.}$$

D. Un numero espresso in unità dell'infima specie come si riduce a numero complesso?

R. È necessario eseguire operazioni inverse alle precedenti. Sia per esem. 5743 minuti, (antiche mis. lineari di Napoli) che debba esprimersi in canne, palmi, ec. Sapendo che 5 minuti formano un'oncia, che 12 once formano 1 palmo, e 8 palmi una canna, si dividerà prima per 5, poi il quoziente per 12, poi l'altro quoziente per 8; ed eseguita l'operazione, siccome si vede a fianco, i resti saranno le diverse parti del numero complesso; cioè si avrà

$$\begin{array}{r|l} 5743^{\text{min.}} & 5 \\ 3^{\text{min.}} & \hline & 1148^{\text{on.}} \\ & 68 \\ & 8^{\text{on.}} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 12 & \\ & \hline & 95^{\text{pal.}} \\ & 7^{\text{pal.}} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & \\ & \hline & 11^{\text{can.}} \end{array}$$

$$5743^{\text{min.}} = 11^{\text{can.}} 7^{\text{pal.}} 8^{\text{on.}} 3^{\text{min.}}$$

D. Come si fa l'addizione de' numeri complessi?

R. Si sommano separatamente i numeri di ciascun or-

57	13	5	din.	dine, cominciando dal più piccolo;
2	0	11		e poi da ogni somma se ne ricavano
48	19	7		le unità dell'ordine superiore per ri-
32	15	4		portarle alla somma seguente. Ecco un
141	9	3		esempio: la somma de' denari è 27;

divisa per 12 si ha per resto 3 e per quoziente 2; si scri-

ve il resto 3, e il quoziente 2 si riporta alla colonna seguente. Così si prosegue.

D. Come si fa la sottrazione de' numeri complessi?

R. Sicecome la sottrazione dipende dagli stessi principii che han servito per le altre specie di numeri, basterà a dichiararla l'annesso esempio.

Da 13'' non si può toglier 47; per cui si stacca dai minuti primi un minuto primo che forma 60'', 60 più 13'' formano 73'', da cui tolto 47'' resta 26''. Il 5 che viene in seguito è divenuto 4; da 4 non si può toglier 42, per cui si stacca 1 ora che si converte in 60': da 64 tolto 42 resta 22. Così si continuerà.

D. Come si moltiplica un numero complesso per un numero astratto?

R. Ogni parte del moltiplicando si moltiplica per il moltiplicatore, e da' diversi prodotti parziali se ne ricavano le unità degli ordini superiori. Si debba moltiplicare 35^{cas.} 7^{pal.} 3^{on.} 2^{min.} per 14. Si moltiplicherà da prima 35^{cas.} per 14 il che dà le due prime linee de' prodotti; poi 7^{pal.} per 14 dà 98 palmi ovvero 12^{cas.} 2^{pal.}, poi 3^{on.} per 14 che dà 42^{on.} ovvero 3^{pal.} 6^{on.}, e in fine 2^{min.} per 14 che dà 5^{on.} 3^{min.}. La somma di tutti questi prodotti parziali, che è 502^{cas.} 5^{pal.} 11^{on.} 3^{min.} è il prodotto totale.

D. Come si divide un numero complesso per un numero astratto?

R. Si dividono da prima le unità dell'ordine più alto, il resto si converte in unità della specie che segue, e a questo resto così convertito si aggiunge la parte dello stesso ordine contenuto nel dividendo, e si ha un secondo dividendo parziale espresso in unità della seconda specie; questo si divide per lo divisore, e si hanno le unità di seconda specie del quoziente; il resto si converte in unità della specie che segue, e a queste si uniscono le unità dello stesso ordine contenute nel dividendo, e così si prosegue sempre col medesimo metodo. Sia da dividersi 154^{th.} 3^{on.} 2^{dr.} 1^{scr.} 15^{sc.} per 38. La divisione si fa nel modo che segue:

	154 lib. 3 on. 2 dr. 1 scr. 15 ac.	38
resto	2	
	12	4 lib. 0 on. 7 dr. 0 scr. 10 ac. 15
	<u>24</u>	38
	3	
1° divi.	27 on.	
2° divi.	272 dr.	
resto	6	
	3	
	<u>18</u>	
	1	
3° divi.	19 scr.	
	<u>20</u>	
	380	
	15	
4° divi.	395 ac.	
resto	15	

Si divide 154^{lib.} per 38; e il resto 2 si converte in once moltiplicandole per 12, il che dà 24 once; più 3 once che sono nel dividendo, formano 27 once, che è il secondo dividendo parziale. Siccome 27 non contiene 38, si scrive 0 nel quoziente, e il 27 si converte in dramme moltiplicandolo per 10, e poi al prodotto aggiungendo 2 si forma il 3° dividendo 272 dramme. Così si prosegue.

Sia ancora da dividersi 5437 tese per 213.

	5437 tes.	213
	1177	25 tes. 3 pi. 1 pol. 10 lin. 3 punti. 157
	112	213
	6	
1° divi.	672 pi.	
	33	
	<u>12</u>	
	66	
	33	
2° divi.	396 po.	
	<u>183</u>	
	12	
	366	
	183	
3° divi.	2196 lin.	
	<u>66</u>	
	12	
	132	
	66	
4° divi.	796	
	<u>157</u>	

Diviso 5437 tese per 213, si ha per quoziente 25 e per resto 112. Questo resto si converte in piedi, moltiplicandolo per 6; il che dà 672 piedi. Così si continua.

Siccome una frazione è una divisione indicata, questa operazione fa convertire in numero complesso il numero di tese $\frac{5437}{213}$.

Se la frazione fosse decimale, l'operazione sarebbe assai più semplice, perchè la divisione si fa sempre con metter la virgola. Per es. il numero 49^{can.},57 si converte in numero complesso moltiplicando 0,57 per 8, il che dà 4,56 palmi; poi 0,56 per 12, il che dà 6,72 once; e così continuando si ottiene

$$49^{\text{can.}},57 = 49^{\text{can.}} 4^{\text{pal.}} 6^{\text{on.}} 3^{\text{min.}},6.$$

D. Come si moltiplica un numero complesso per un altro numero complesso di specie diversa.

R. Si riduce il moltiplicatore a numero astratto, esprimendolo sotto forma di frazione; e poi si fa l'operazione come nel caso precedente. È da osservarsi che il prodotto dev'essere della stessa natura del moltiplicando. Sia da moltiplicarsi 54^{lir.} 13^{sol.} 2^{den.} per 5^{tes.} 4^{ried.} 2^{pol.} 3^{lin.}.

Ora 4^{pi.} 2^{pol.} 3^{lin.} equivalgono a $\frac{603}{864}$ di tesa; la qual frazione ridotta a più semplice espressione, dividendo i suoi termini per 9, diviene $\frac{67}{96}$. Quindi l'operazione riducesi a moltiplicare 54^{lir.} 13^{sol.} 2^{den.} per 5 $\frac{67}{96}$.

Ecco l'operazione :

$$\begin{array}{r}
 54^{\text{lir.}} \quad 13^{\text{sol.}} \quad 2^{\text{den.}} \\
 5 \frac{67}{96} \\
 \hline
 5 \times 54^{\text{lir.}} = 270^{\text{lir.}} \\
 5 \times 13^{\text{sol.}} = 3 \quad 5^{\text{sol.}} \\
 5 \times 2^{\text{den.}} = 10^{\text{den.}} \\
 \frac{67}{96} \times 54^{\text{lir.}} = \frac{67 \times 9}{16} = 37 \quad 13 \quad 9^{\text{den.}} \\
 \frac{67}{96} \times 13^{\text{sol.}} = 9 \quad 0 \quad \frac{7}{8} \\
 \frac{67}{96} \times 2^{\text{den.}} = 1 \quad \frac{19}{48} \\
 \hline
 311^{\text{lir.}} \quad 8^{\text{sol.}} \quad 9^{\text{den.}} \quad \frac{13}{48}
 \end{array}$$

La sola cosa da avvertire è che i prodotti di 54^{lir.} di 13^{sol.} di 2^{den.} per la frazione $\frac{67}{96}$ si convertono anche in numero complesso con la regola generale; e di più il prodotto $\frac{67}{96} \times 54$ si è prima ridotto a $\frac{67 \times 9}{16}$ col dividere 54 e 96 per 6, e poi si è fatta la moltiplicazione: alla qual cosa è utile mettere attenzione per rendere il calcolo più semplice.

D. Come si divide un numero complesso per un altro numero complesso?

R. In ogni caso è necessario esprimere il divisore sotto *Arit.*

forma di frazione, affinchè possa figurare da numero astratto. Ma per esprimere il quoziente bisogna distinguere due casi: quando il dividendo e il divisore sono della stessa specie, e quando sono di specie diversa.

1° caso. Quando i due numeri sono della stessa specie, si mettono tutti due sotto forma di frazioni che abbiano lo stesso denominatore, e allora si tratterà di far la divisione de' numeratori; questo corrisponde a convertire i numeri in unità dell'infima specie, il qual cambiamento di unità non ha nessuna influenza sul valore del quoziente.

Per es. si debba dividere

$$134^{\text{can.}} \ 3^{\text{pal.}} \quad \text{per} \quad 2^{\text{can.}} \ 3^{\text{pal.}} \ 8^{\text{on.}} \ 3^{\text{min.}}$$

Questi due numeri ridotti a minuti divengono 74100 e 1303. Si tratterà perciò di dividere 74100 per 1303. Il quoziente può essere o numero astratto o numero complesso di specie diversa. Se è numero astratto, l'operazione si riduce alla divisione di numeri interi; se poi è numero complesso di specie diversa, per es. libbre, si dovrà considerare come se si dividesse 74100^{lb.} per 1303.

2° caso. Se il dividendo e il divisore sono di specie diversa, si metterà il divisore sotto forma di frazione, e il dividendo si dovrà moltiplicare per il denominatore e dividere per il numeratore di questa frazione. Per esempio sia da dividersi

$$315^{\text{tir.}} \ 2^{\text{sol.}} \ 3^{\text{den.}} \quad \text{per} \quad 13^{\text{m.}} \ 0^{\text{pi.}} \ 3^{\text{pal.}} \ 10^{\text{lin.}} \ 6^{\text{pen.}}$$

Il divisore ridotto a frazione diviene $\frac{135630}{10368}$. Questa frazione, dividendo i termini per 9 e poi per 2 diviene $\frac{7535}{576}$. Quindi si moltiplicherà $315^{\text{tir.}} \ 2^{\text{sol.}} \ 3^{\text{den.}}$ per 576, e il prodotto si dividerà per 7535.

D. Quali conoscenze sono necessarie per il calcolo commerciale?

R. Per il commercio interno vi è bisogno di conoscere le misure del paese in cui si dimora, e il modo come sono divise. Per il commercio esterno si debbono conoscere non solo le misure del paese con cui si ha relazione, ma anche i rapporti che quelle hanno con le proprie.

D. Come si esprime una misura per mezzo di un'altra?

R. Essendo il metro la misura meglio stabilita, tutte

le nazioni hanno cercato di trovare i rapporti delle misure proprie con quelle del sistema metrico francese. Quindi i casi più comuni che sogliono presentarsi per esprimere una misura per mezzo di un'altra son contenuti nelle seguenti questioni.

I. Essendo un palmo = metri 0,26455, 1 metro a quanti palmi sarà eguale?

È chiaro che da quella eguaglianza si può stabilir la proporzione

$$1 \text{ palmo} : 1 \text{ metro} :: 0,26455 : 1,$$

da cui si ricava

$$1 \text{ metro} = \text{pal.} \frac{1}{0,26455} = \frac{100000}{26455},$$

e fatta la divisione si ha

$$1 \text{ metro} = \text{pal.} 3,78;$$

perciò avendo il valore di un' unità di misura espresso per mezzo di un'altra, si ha la seconda espressa per la prima prendendone il valore inverso, cioè dividendo l'unità per il rapporto dato.

Così avendosi

$$1 \text{ rotolo} = \text{chilog.} 0,8909972,$$

si trova $1 \text{ chilog.} = \text{rot.} \frac{1}{0,8909972}$, ovvero

$$1 \text{ chilogr.} = \text{rot.} 1,1223379.$$

II. Sapendosi che 1 pal. = metri 0,26455 e 1 piede francese = 0^m,32484, si cerca il palmo espresso in piedi, o il piede espresso in palmi.

Si farà la proporzione

$$1 \text{ pal.} : 1 \text{ pie} :: 0,26455 : 0,32484,$$

quindi $1 \text{ piede} = \frac{32484}{26455} \text{ palmi} = 1^{\text{pal.}} 22789,$

$$1 \text{ palmo} = \frac{26455}{32484} \text{ piedi} = 0^{\text{pie.}} 81440$$

Il numero 1,22789 è il rapporto del piede al palmo, siccome l'altro numero 0,8144 è il rapporto del palmo al piede.

III. Se si vuol convertire in piedi la lunghezza 3^{can.} 5^{pal.} 7^{ca.} 2^{min.} (misura antica), si ridurrà prima a palmi quel numero, il quale diverrà palmi $29 \frac{37}{60}$, ovvero palmi

$29,61 \frac{2}{3}$; poi si farà la proporzione

$$1^{\text{pal.}} : 0^{\text{r.}} 8144 :: 29,61 \frac{2}{3} : x,$$

dalla quale si ricava

$$x = 0,8144 \times 29,61 \frac{2}{3} = 24^{\text{re}}, 119813.$$

Questo numero poi si potrà, se si vuole, convertire in tese, piedi, pollici e linee. In effetti moltiplicando la frazione decimale per 12 si ha

$$0^{\text{re}}, 119812 = 1^{\text{re}}, 377756;$$

similmente si ha

$$0^{\text{pol.}}, 377756 = 4^{\text{lin.}}, 533072;$$

quindi si ha

$$3^{\text{can.}} \ 5^{\text{pal.}} \ 7^{\text{on.}} \ 2^{\text{m.}} = 4^{\text{tes.}} \ 0^{\text{r.}} \ 1^{\text{pol.}} \ 4^{\text{lin.}}, \ 533072.$$

Da questo esempio si scorge che per esprimere i palmi $29,61 \frac{2}{3}$ in piedi si è dovuto moltiplicare questo numero per il rapporto del palmo al piede.

In generale una misura si converte in un'altra moltiplicandola per il rapporto della prima alla seconda. Così sapendo che il rapporto del rotolo all'antica libbra di Francia è 1,8365, 28 rotoli si ridurranno a libbre moltiplicandole per 1,8365, e si avrà

$$28 \text{ rot.} = \text{lib. } 28 \times 1,8365 = \text{lib. } 51,482$$

F I N E.

584 679959

INDICE



NOZIONI PRELIMINARI	pag. 1
-------------------------------	--------

Che cosa è la grandezza o quantità?
 In che modo si determina la variazione di una grandezza e propriamente
 l'aumento o la diminuzione?
 Qual è l'oggetto di questo paragone?
 Perchè le grandezze di specie diversa non si possono paragonare?
 Che cosa è l'unità?
 Che cosa è il numero?
 Di quante specie sono i numeri rispetto alla loro natura?
 Che cosa sono i numeri concreti e i numeri astratti?

ART. I. DE' NUMERI INTERI	2
-------------------------------------	---

§. I. <i>Sistema di numerazione</i>	ivi
---	-----

Quanti sono i numeri?
 Come si è fatto per esprimere tutti i numeri per mezzo di poche parole?
 In che consiste la numerazione scritta?
 Che s'intende per base del sistema di numerazione?
 Come si leggono i numeri e come si scrivono sotto la dattatura?
 Che altro vi è da osservare intorno al sistema di numerazione e al modo
 di leggere i numeri?
 Che cosa è l'Aritmetica?
 Quali sono le operazioni principali che si fanno sui numeri?

§. II. <i>Dell'addizione.</i>	5
---	---

Che cosa è l'addizione?
 Quali sono i numeri che possono sommarsi?
 Come si fa l'addizione di due numeri semplici?
 Come si fa l'addizione de' numeri composti di più cifre?

§. III. <i>Della sottrazione</i>	6
--	---

Che cosa è la sottrazione?
 Come si fa la sottrazione de' numeri composti di più cifre?
 Come bisogna regolarsi quando nel numero superiore vi sono molti zeri
 che si succedono?
 In qual altro modo si fa la sottrazione?

§. IV. <i>Della moltiplicazione.</i>	7
--	---

In che consiste la moltiplicazione de' numeri interi?
 Come si fa la moltiplicazione di un numero semplice per un altro nu-
 mero semplice?
 Quale proprietà risulta dalla tavola di Pitagora?
 Come si fa la moltiplicazione quando il moltiplicando è di più cifre e
 il moltiplicatore di una sola cifra?
 Come si fa la moltiplicazione quando anche il moltiplicatore è di più cifra?
 Vi sono altre osservazioni da fare intorno alla moltiplicazione?

§. V. Della divisione. » 10

Che cosa è la divisione de' numeri interi?
Come si fa la divisione allorchè il divisore è di una sola cifra?
Come si fa la divisione quando il divisore è di più cifre?
Come si fa la divisione compendiosa?
Quali cose sono da avvertirsi nella divisione?

ART. II. DE' DECIMALI » 14

Che cosa sono i decimali?
Qual è la regola per leggere e scrivere i decimali secondo la maniera comune?
Gli zeri posti a destra o a sinistra di un numero che contiene cifre decimali alterano il valore del numero?
In quale caso un numero cambia valore, anche senza cambiar le cifre?
Come si fa l'addizione de' decimali?
Come si fa la sottrazione de' decimali?
Come si fa la moltiplicazione de' decimali?
Come si fa la divisione de' decimali quando il divisore è numero intero?
Come si fa la divisione de' decimali quando il divisore contiene cifre decimali?
Quali vantaggi offrono i decimali nella divisione?

ART. III. DELLE FRAZIONI » 18

Come si esprimono i numeri frazionari?
Come si scrivono i numeri frazionari?
Come si leggono i numeri frazionari?
Data l'unità principale, come si fa per avere il valore del numero frazionario?
Quando un numero frazionario è maggiore, eguale o minore dell'unità?
Da un numero frazionario come si ricavano gl'interi?
Come si riduce un intero ad una frazione di un dato denominatore?
Quali sono le proprietà delle frazioni?
Che s'intende per numero pari e numero impari?
Che s'intende per numero primo?
Come si riduce una frazione alla sua più semplice espressione?
Come si fa più brevemente l'operazione precedente?
Come si sommano e sottraggono le frazioni?
Come si riducono più frazioni allo stesso denominatore?
Date due frazioni come si conosce quale di esse è più grande?
Come si sommano interi uniti a frazioni?
Come si sottraggono gl'interi uniti alle frazioni?
Come si moltiplica una frazione allorchè il moltiplicatore è numero intero?
Come si divide una frazione allorchè il divisore è numero intero?
Come si moltiplica una frazione per un'altra?
A che corrisponde la moltiplicazione allorchè il moltiplicatore è una frazione?
Come si fa la divisione di una frazione per un'altra?
Come si moltiplicano e si dividono gl'interi uniti alle frazioni?
Una frazione ordinaria come si converte in decimali?
Quante cifre si ottengono nel quoziente?

ART. IV. DELLA RIPROVA DELLE OPERAZIONI . . . » 29

Che cosa è la riprova di un'operazione?
Come si fa la riprova dell'addizione?
Come si fa la riprova della sottrazione?
Come si fa la riprova della moltiplicazione e della divisione?

ART. V. DE' RAPPORTI E DELLE PROPORZIONI.

30

- Che cosa è il *rapporto* o la *ragione* di due quantità?
- Che cosa è la *proporzione*?
- Quali proprietà risultano dalla natura del rapporto?
- In quante maniere si possono disporre i termini di una proporzione?
- Quale conseguenza importante si ricava da questa proprietà?
- A quale scopo debbono esser dette le operazioni precedenti?
- Qual è l'operazione indicata colla parola *componendo*?
- In che consiste l'operazione distinta colla parola *dividendo*?
- Che cosa si ottiene colle due operazioni, componendo e dividendo, seguite contemporaneamente?
- Che s'intende per *ragione composta* di molte ragioni?
- Dati tre termini di una proporzione come si trova il quarto?
- In che consiste la regola del tre semplice?
- Che cosa è la regola del tre composta?
- Che s'intende per *interesse*?
- A che riduconsi i problemi d'interesse semplice?
- Come si trova il valore che una somma acquista dopo un dato tempo?
- Come si trova il valore attuale di una somma che deve riscuotersi dopo un dato tempo?
- Che cosa è la regola di sconto?
- Che s'intende per *valor nominale* e *valor reale* di una somma?
- In che consiste la regola di società?
- In che consiste la regola d'alligazione?

ART. VI. DELLE MISURE

41

- Come si misurano le quantità?
- Negli oggetti quali sono le quantità soggette a misura?
- Che ufficio fa la moneta?
- Qual è il nuovo sistema metrico francese?
- Quali erano le antiche misure usate in Parigi?
- Quali erano le misure della Città di Napoli prima del decreto di aprile 1840?
- Qual è il sistema di misure del regno di Napoli, stabilito con la legge de' 6 Aprile 1840?

ART. VII. DE' NUMERI COMPLESSI

45

- Che cosa sono i numeri complessi?
- Come si riduce un numero complesso ad unità dell'ultima specie, ossia ad unità del più piccolo ordine?
- Come si riduce sotto forma di frazione un numero complesso?
- Un numero espresso in unità dell'ultima specie come si riduce a numero complesso?
- Come si fa l'addizione de' numeri complessi?
- Come si fa la sottrazione de' numeri complessi?
- Come si moltiplica un numero complesso per un numero astratto?
- Come si divide un numero complesso per un numero astratto?
- Come si moltiplica un numero complesso per un altro numero complesso di specie diversa?
- Come si divide un numero complesso per un altro numero complesso?
- Quali conoscenze sono necessarie per il calcolo commerciale?
- Come si esprime una misura per mezzo di un'altra?



M
T

BIBLIOTECA

NA
B
Mis